UNIVERSITY OF HAWAII
LIBRARY
PERIODICAL

MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK

NEUE FOLGE
DER MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK

UNTER MITWIRKUNG DER
ÖSTERREICHISCHEN MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON
J. RADON
WIEN

52. BAND, 4. (SCHLUSS-) HEFT
MIT 10 TEXTABBILDUNGEN
(AUSGEGEBEN IM OKTOBER 1948)

WIEN
SPRINGER-VERLAG
1948

Mh. Math.

Monatshefte für Mathematik

Neue Folge der Monatshefte für Mathematik und Physik

erscheinen zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften von wechselndem Umfang, die in kurzer Folge zur Ausgabe gelangen. Diese Hefte werden zu Bänden von 20—25 Bogen vereinigt. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten. Für Lieferungen in das Ausland gelten Auslandspreise.

Die für die Monatshefte für Mathematik bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung der Monatshefte für Mathematik, Mathematisches Institut der Universität, Wien IX., Strudlhofgasse 4,

zu senden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs veröffentlicht. Beiträge, welche bereits an anderer Stelle in wörtlich oder auch nur inhaltlich gleicher Fassung publiziert worden sind, können nicht aufgenommen werden. Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke kostenlos und können weitere 125 Exemplare, falls bei Rücksendung der ersten Korrektur bestellt, gegen angemessene Entschädigung geliefert erhalten.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Hinweglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Von Abbildungen ist sehr sparsamer Gebrauch zu machen, da sie die Drucklegung der Beiträge verzögern und auch den Preis der Zeitschrift verteuern. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftung nur in Bleistift ausführen) oder in klaren verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5

Fernsprecher U 26-5-60 Serie — Telegrammadresse Springerbuch Wien

52. Band/4. Heft — Inhaltsverzeichnis

	Seite
Krames, J. Über allgemeine „gefährliche Raumgebiete" der Luftphotogrammetrie	265
Radon, J. Zur mechanischen Kubatur	286
Pinl, M. Über Flächen mit isotropem mittleren Krümmungsvektor	301
Hornich, H. Die algebraischen Funktionen, deren Iteration die Identität liefert	311
Kruppa, E. Strahlflächen als Verallgemeinerungen der Cesàro-Kurven	323
Müller, H. R. Zyklographische Betrachtung der Kinematik der speziellen Relativitätstheorie	337
Buchbesprechungen	354
Autorenverzeichnis	359

Über allgemeine „gefährliche Raumgebiete" der Luftphotogrammetrie.

Von
Josef Krames, Wien.

Mit 6 Abbildungen.

(Eingelangt am 3. November 1947.)

Die vorliegende Arbeit bildet die Fortsetzung einer vorausgegangenen desselben Verfassers[1], in der die besonderen, mit einer *„gefährlichen Fläche im engeren Sinne"* verbundenen „gefährlichen Raumgebiete" ausführlich behandelt wurden. Hier werden nunmehr allgemeine „gefährliche Raumgebiete" untersucht, nämlich solche, bei denen *allgemeine „gefährliche Flächen"* als Grundflächen dienen. Als „gefährliche Flächen im allgemeinen oder engeren Sinne" werden dabei jene aus zwei Zentren aufgenommene Flächen bezeichnet, bei denen die Hauptaufgabe der Photogrammetrie *zwei wesentlich verschiedene* beziehungsweise zwei *zusammen-* (d. h. genügend nahe) *gerückte* Lösungen aufweist.

Die vollständigen geometrischen Begrenzungen solcher Raumgebiete bestehen auch im allgemeinen Fall aus je *zwei orthogonalen Regelflächen zweiten Grades*, die mit der Grundfläche einem *linearen Büschel* angehören. Die Grundkurve vierter Ordnung dieses Büschels zerfällt in einen geraden kubischen Kreis und eine seiner Sehnen. Jede andere in diesem Büschel enthaltene Fläche zweiten Grades ist ebenfalls orthogonal und besitzt desgleichen zwei adjungierte Erzeugenden, welche durch die Aufnahmezentren gehen. Dabei ist besonders zu beachten, daß diese Erzeugendenpaare zwei *kongruente Strahlbüschel* erfüllen.

Werden die beiden Zielstrahlbündel in allgemeiner Weise gegeneinander verlagert, so existiert immer ein solches Flächenbüschel von folgender Eigenschaft: Die durch die Punkte seiner Flächen jeweils einander zugeordneten Zielstrahlbüschel haben in der zweiten Lage der Bündel stets dieselbe Parallaxe, und zwar in je zwei von ∞^1 Raumrichtungen, die zu einer Stellung parallel sind, eine andere. Ferner zeigt sich, daß auch umgekehrt jedes Flächenbüschel von der genannten Beschaffenheit auf unendlich viele Arten als Büschel von derartigen Flächen konstanter Parallaxe aufgefaßt werden kann. Gleiches gilt im wesentlichen auch für die eingangs erwähnten Sonderfälle, bei welchen jedoch bloß infinitesimale (praktisch gesprochen, in gewissen engen Grenzen gehaltene) Bündelbewegungen in Frage kommen.

---

[1] *J. Krames*, Über die „gefährlichen Raumgebiete" der Luftphotogrammetrie, Photographische Korrespondenz 84 (1948), S. 1—16.

Man gewinnt damit folgende, für die Photogrammetrie wohl grundlegend wichtige Erkenntnis: *Durch jede Verlagerung der beiden Zielstrahlbündel (Projektorensysteme) und die kleinste am Geländemodell gerade noch meßbare y-Parallaxe* (die hier über den gesamten Aufnahmeraum *konstant* vorausgesetzt wird) *ist immer bereits ein „gefährliches Raumgebiet" vollständig bestimmt.*

Diese Ergebnisse werden in den nachfolgenden Zeilen durchaus zweckdienlich auf anschaulich-geometrischem Wege entwickelt. Wir stützen uns dabei einerseits auf eine Reihe noch kaum beachteter Sätze über gerade kubische Kreise und orthogonale Regelflächen zweiten Grades (s. unter **1** und **2**), andererseits auf gewisse, vom Verfasser erst vor kurzem angegebene Parallaxeneigenschaften zweier Sehstrahlbündel, die hier (unter **3**) ebenfalls rein geometrisch bestätigt werden. Schließlich wird (unter **4**) auf die Begrenzungsflächen der in Rede stehenden allgemeinen „gefährlichen Raumgebiete" näher eingegangen.

1. Orthogonale Regelflächen zweiten Grades und gerade kubische Kreise.

Unter orthogonalen Regelflächen zweiten Grades sind bekanntlich solche zu verstehen, die durch Paare *kongruenter Ebenenbüschel* (mit reellen Achsen) erzeugt werden können[2]. Zu ihnen gehören die *orthogonalen Hyperboloide* und *Kegel*, die *orthogonalen Paraboloide* (die früher umständlicher als gleichseitige hyperbolische bezeichnet wurden), ferner die *Drehzylinder* und die *gleichseitig-hyperbolischen Zylinder*, schließlich als Ausartungsfälle die *Paare normaler Ebenen*, wovon eine oder auch beide mit der Fernebene ω zusammenfallen können. Die orthogonalen Hyperboloide und Kegel sind auch dadurch gekennzeichnet, daß ihre reellen Kreisschnittebenen zu bestimmten reellen Erzeugenden, die *Haupterzeugenden* heißen, normal sind. Hieraus folgt u. a. die für orthogonale Regelflächen zweiten Grades charakteristische Halbachsenrelation

$$\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 0.$$

Wir denken uns zuerst ein orthogonales Hyperboloid Ω im Normalriß auf eine reelle Kreisschnittebene Π dargestellt (Abb. 1). Da Ω insgesamt vier Haupterzeugenden enthält, von welchen je eine in beiden Scharen, etwa $\mathfrak{e}_s$ und $\mathfrak{f}_t$, zu Π normal ist, erfüllen die Normalrisse der

---

[2] In dieser Form wurde dies zuerst ausgesprochen in *J. Krames*, Zur Ermittlung eines Objektes aus zwei Perspektiven (Ein Beitrag zur Theorie der „gefährlichen Örter"), Monatsh. Math. Phys. 49 (1941), S. 327—354. — Auf diese Arbeit soll in der Folge kurz mit „Z E" verwiesen werden. — Die Regelflächen zweiten Grades, die durch kongruente Ebenenbüschel mit *komplexen* Achsen erzeugbar sind, sollen bei einer anderen Gelegenheit noch ausführlicher behandelt werden.

zu Π parallelen Kreisschnitte das elliptische Kreisbüschel mit den Grundpunkten in den Bildpunkten von e_s und f_t. Der kleinste dieser Kreise hat im Raum die längere reelle Achse m von Ω zum Durchmesser. Auf ihm befinden sich die beiden Flächenscheitel A und B, durch welche die restlichen Haupterzeugenden f_s und e_t von Ω gehen; diese sind ebenfalls normal zu m und parallel. Wir nennen je zwei Erzeugenden e_1, e_2 (f_1, f_2) *adjungiert*, wenn aus ihnen die Erzeugenden f_i (e_i) der anderen Schar (oder die Punkte einer auf Ω verlaufenden Kurve) durch *kongruente* Ebenenbüschel projiziert werden. e_1, e_2 sind stets bezüglich m achsialsymmetrisch[3], sodaß *ihre* (durch den Bildpunkt von f_t gehenden) *Normalrisse auf Π das Bild der Flächenachse* m *zur Winkelhalbierenden* haben.

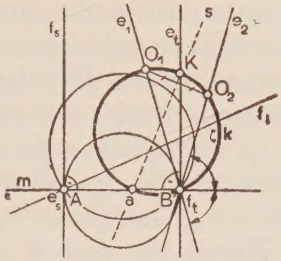

Abb. 1.

Beim orthogonalen Kegel sind beide Erzeugendenscharen zusammengefallen, und es sind bloß zwei Haupterzeugenden vorhanden.

Eine Raumkurve dritter Ordnung k heißt bekanntlich *„gerader kubischer Kreis"*, wenn sie eine reelle eigentliche Asymptote a besitzt und durch die absoluten Punkte der zu a normalen Stellung geht. Man erhält eine solche Kurve am einfachsten als Teilschnitt eines Drehzylinders ζ mit einem orthogonalen Paraboloid Φ, das in einem Durchmesser s und einer Erzeugenden a von ζ seine Scheitelerzeugenden hat. Dies ergibt folgende Darstellung der Kurve in Zylinderkoordinaten:

$$r = 2\,a\cos\varphi, \qquad z = k\,\mathrm{tg}\,\varphi.$$

k hat in s eine *Symmetrieachse*, und der Schnittpunkt K von k mit s ist ein *Kurvenscheitel*.

Wir stellen sogleich fest: *Jede Fläche zweiten Grades Ω, auf der ein gerader kubischer Kreis* k *existiert, ist orthogonal.* Denn durch den reellen Fernpunkt von k gehen sodann zwei reelle Erzeugenden von Ω, von welchen mindestens eine im Endlichen verläuft, und die dazu normalen Ebenen schneiden Ω nach Kreisen (oder nach Ausartungsformen von solchen). Umgekehrt gibt es *auf jedem orthogonalen Hyperboloid stets ∞^2 gerade kubische Kreise* k, und dies gilt auch für jeden orthogonalen

[3] Siehe „Z E", Nr. 4, S. 338.

Kegel, bei dem k stets den Scheitel enthält. Die reellen Asymptoten a dieser Kurven k sind nämlich zu je zwei (untereinander parallelen, bzw. zusammengefallenen) Haupterzeugenden des Hyperboloides (bzw. Kegels) parallel und befinden sich in der Verbindungsebene ε dieser Geraden (bzw. in der entsprechenden Tangentialebene an den Kegel). Dies folgt einfach daraus, daß diese Asymptoten a als Tangenten an Kurven, die auf Ω verlaufen, zugleich Flächentangenten von Ω im Fernpunkt F von a sind und daher der Tangentialebene $\varepsilon = [e_s\, f_t]$ bzw. $[e_t\, f_s]$ von Ω in F angehören. Weil ferner jeder solche kubische Kreis aus seinem Fernpunkt durch einen Drehzylinder ζ projiziert wird, der mit Ω eine (durch F gehende) Haupterzeugende gemeinsam hat, projizieren sich diese Kurven im Normalriß auf eine zu a normale Ebene in die ∞^2 Kreise, die durch einen der Bildpunkte dieser Haupterzeugenden gehen. Aus Abb. 1 entnimmt man überdies, daß jeder auf Ω befindliche kubische Kreis k alle Erzeugenden der einen Schar zu *Unisekanten*, die der anderen Schar zu *Bisekanten* (Sehnen) hat[4]. Die ∞^2 auf Ω vorhandenen Kurven k verteilen sich danach auf vier Familien mit je einer Haupterzeugenden als Bisekante.

Man erkennt ferner leicht, daß *der Kurvenscheitel* K *jedes auf* Ω *gelegenen geraden kubischen Kreises* k *in den Schnittpunkt von* k *mit einer der beiden Haupterzeugenden seiner Unisekantenschar fällt.* Denn K liegt stets auf der a gegenüberliegenden Erzeugenden des Zylinders ζ. Die andere Haupterzeugende dieser Schar ist parallel zur reellen Asymptote a von k. Weil k bezüglich des durch K gehenden Durchmessers s von ζ achsial-symmetrisch ist, *liegen je zwei Punkte* O_1, O_2, *in denen* k *von zwei adjungierten Erzeugenden seiner Unisekantenschar getroffen wird, immer symmetrisch zu* K *oder* s. Wir bezeichnen daher O_1, O_2 als *„adjungierte Punkte"* von k. Endlich ergibt sich ohne weiters: Durch irgend zwei reelle Punkte eines orthogonalen Hyperboloides (oder Kegels) Ω gehen im allgemeinen stets vier (bzw. zwei) gerade kubische Kreise, die Ω angehören.

Geht man von einem geraden kubischen Kreis k aus, so kann man umgekehrt nach allen orthogonalen Regelflächen zweiten Grades fragen, die durch k legbar sind. Jede solche Fläche Ω muß nach obigem zwei zur reellen Asymptote a von k parallele (allenfalls zusammenfallende)

---

[4] Dies gilt bekanntlich für alle Raumkurven dritter Ordnung auf einer Fläche zweiten Grades. Wegen der Literatur hierüber siehe etwa Enzykl. Math. Wissensch. III C 2 (*O. Staude*), Nr. 94.

Haupterzeugenden aufweisen, von denen eine, etwa f_t, dem Drehzylinder ζ durch k angehört, während die andere, e_s, innerhalb der Verbindungsebene ε von f_t mit a liegt. *Durch* k *gehen somit* ∞^2 *orthogonale Hyperboloide* Ω *und* ∞^1 *orthogonale Kegel* (zu denen auch ζ gehört). Letztere haben ihre Scheitel auf k, ζ insbesondere im Fernpunkt F von k. Man kann ferner sagen: *Auf jeder durch einen geraden kubischen Kreis* k *legbaren orthogonalen Regelfläche zweiten Grades* Ω *sind die durch irgend zwei adjungierte Punkte* O_1, O_2 von k *gehenden Erzeugenden* e_1, e_2 *der Unisekantenschar von* k *stets adjungiert.*

Bei einem *orthogonalen Paraboloid* Ψ sind die reellen Kreisschnitte in die Erzeugenden e_l, f_l beider Scharen (und je eine der Fernerzeugenden f_s^∞, e_s^∞) degeneriert. Jede dieser Scharen enthält eine eigentliche *Scheitelerzeugende* e_t, bzw. f_t, die *alle Erzeugenden der anderen Schar rechtwinklig schneidet* und daher zugleich als *Haupterzeugende* anzusehen ist. Die restlichen Haupterzeugenden fallen in die Ferngeraden e_s^∞, f_s^∞ von Ψ und bestimmen die aufeinander normalen Richtebenen der beiden Scharen. Für eine solche Fläche Ψ ändert sich an obigen Überlegungen folgendes: Jeder Drehzylinder ζ, der durch eine der beiden Scheitelerzeugenden f_t oder e_t geht, schneidet Ψ außerdem noch längs eines geraden kubischen Kreises k, dessen reelle Asymptote a zu f_t, bzw. e_t parallel ist und die Achse m der Fläche normal schneidet (s. Abb. 2, wo Ψ im Normalriß auf eine der Richtebenen dargestellt ist). Dabei liegt der Scheitel K von k wie beim orthogonalen Hyperboloid stets auf der Scheitelerzeugenden e_t (oder f_t) der anderen Schar von Ψ. Da andere gerade kubische Kreise auf Ψ nicht möglich sind, gibt es auf Ψ ebenfalls ∞^2 solche Kurven.

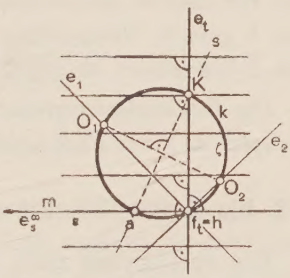

Abb. 2.

Hingegen *lassen sich durch jeden geraden kubischen Kreis* k *bloß* ∞^1 *orthogonale Paraboloide* Ψ *legen*; diese Flächen haben nämlich nach früheren Bemerkungen eine Erzeugende h des durch k gehenden Drehzylinders ζ zur Scheitelerzeugenden f_t, während ihre andere Scheitelerzeugende e_t wieder den Scheitel K von k enthält (s. Abb. 2). Die zu f_t gehörigen Erzeugendenscharen dieser ∞^1 Paraboloide bilden sich in Abb. 2 als Parallelstrahlbüschel der verschiedenen Richtungen ab und erfüllen gemeinsam die *Bisekantenkongruenz* von k. Weil die gegen

die Flächenachse m beispielsweise unter $\pm 45^0$ geneigten adjungierten Erzeugenden e_1 und e_2 der anderen Schar jedes solchen Paraboloides Ψ durch die selben adjungierten Punkte O_1 und O_2 von k gehen (Abb. 2), kann man sofort hinzufügen: *Alle* ∞^1 *durch einen geraden kubischen Kreis* k *legbaren orthogonalen Paraboloide* Ψ *sind untereinander kongruent,* also insbesondere auch kongruent zu jenem durch k gehenden Paraboloid Φ, das die reelle Asymptote a von k zur Scheitelerzeugenden f_t hat. Zum gleichen Ergebnis gelangt man auch durch folgende Umkehrung der bekannten Erzeugung des orthogonalen Paraboloides mittels *„zylindrischer Rollung":*

Rollt ein Drehzylinder Δ *auf einem in seinem Inneren befindlichen Drehzylinder* ζ *von halber Größe ohne Gleiten ab, so bewegt sich jedes mit* Δ *starr verbundene orthogonale Paraboloid* Ψ, *das die Achse von* Δ *zur Scheitelerzeugenden hat, ständig durch einen geraden kubischen Kreis* k, *der auf dem festen Zylinder* ζ *liegt*[5].

Die genannte Scheitelerzeugende beschreibt dabei den Zylinder ζ, und die andere Scheitelerzeugende von Ψ die durch den Scheitel K von k gelegte *Normalebene* $\varkappa$ *zur Asymptote* a. Wird $\varkappa$ als *Hauptebene* von k bezeichnet, so ergibt sich schließlich:

Die Bisekantenkongruenz eines geraden kubischen Kreises k *hat dessen Hauptebene* $\varkappa$ *zur Fußpunktfläche für den Scheitel* K *von* k *als Pol.*

2. Ein lineares Büschel orthogonaler Regelflächen zweiten Grades.

Wir untersuchen nach diesen Vorbereitungen die Mannigfaltigkeit orthogonaler Regelflächen zweiten Grades, die einen geraden kubischen Kreis k und eine seiner Sehnen f gemeinsam haben. Zur leichteren Veranschaulichung werden diese Elemente im Grund-, Auf- und Kreuzriß dargestellt, wobei die Symmetrieachse s und die Asymptote a von k zur Grund- und Kreuzrißebene Π_1 bzw. Π_3 normal sein sollen (s. Abb. 3). Da je zwei Flächen dieses *linearen Büschels* außerhalb seiner in k und f

---

[5] Vgl. *J. Krames,* Darstellende und kinematische Geometrie für Maschinenbauer, Wien 1947, Nr. 34, Abb. 227 auf S. 175, sowie *R. Burmester,* Kinematische Flächenerzeugung vermittels zylindrischer Rollung, Zeitschr. Math. Phys. 33 (1889), S. 339, und *E. Müller-J. Krames,* Vorlesungen über darstellende Geometrie, III. Bd., „Konstruktive Behandlung der Regelflächen", Leipzig und Wien, 1931, Nr. 35, S. 209 und Nr. 41, Aufgabe 30. Aus obigem Text gewinnt man sogleich auch die Sätze über den geraden kubischen Kreis, die in *J. Krames,* Sur une propriété remarquable du cercle cubique droit, Mathésis, Bruxelles, 51 (1937), S. 39—41, abgeleitet wurden.

zerfallenden Grundkurve vierter Ordnung keinen weiteren Raumpunkt gemeinsam haben können, *geht durch jeden nicht auf* k *und* f *gelegenen Punkt* X *genau eine solche Fläche.* Zur Festlegung einer dieser Flächen Ω genügt u. a. die Annahme einer zu a parallelen Treffgeraden von f als

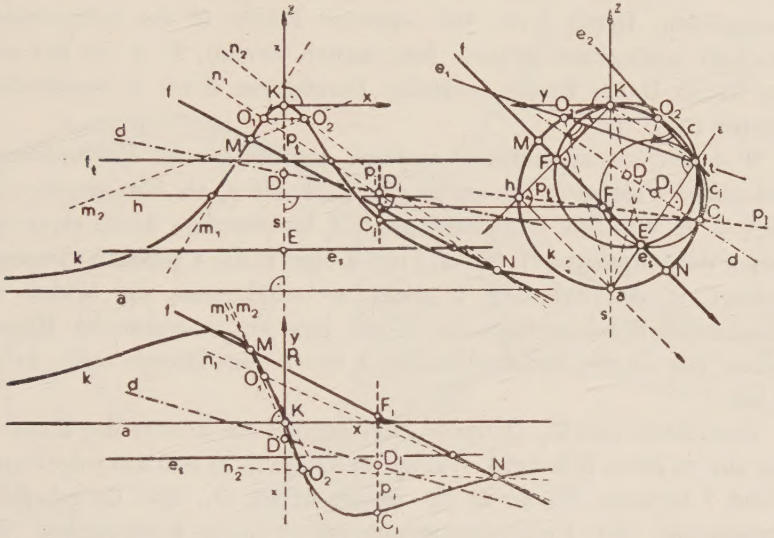

Abb. 3.

Haupterzeugende e_s. Ω besteht sodann aus jenen ∞^1 Bisekanten f_i von k, die in den Ebenen durch e_s liegen, und enthält zugleich die ∞^1 Unisekanten e_i von k, welche die Bisekante f und etwa die zu a und e_s parallele Haupterzeugende f_t von Ω schneiden. f_t gehört nach Nr. 1 dem Drehzylinder ζ durch k und zugleich der Verbindungsebene ε von a und e_s an (s. Abb. 3).

Die Fläche Ω wird von der Hauptebene $\varkappa = [K \perp a]$ von k längs eines Kreises c geschnitten, der nach 1 alle Fußpunkte der von K auf die Erzeugenden f_i von Ω gefällten Lote umfaßt. Mithin hat c den Durchmesser K E, wenn E den Fußpunkt des von K auf e_s gefällten Lotes bezeichnet. Dabei bestätigt sich aus einfachen planimetrischen Beziehungen, daß c auch mit der (zu Π_3 normalen) Haupterzeugenden f_t von Ω einen Punkt gemeinsam hat (s. Abb. 3). Die übrigen Schnittkreise c_i der Fläche Ω mit den Parallelebenen zu Π_3 haben Kreuzrisse, die durch die Bildpunkte von e_s und f_t gehen. Ihrer Raumlage nach sind diese Kreise z. B. durch ihre Schnittpunkte C_i mit dem kubischen

Kreis k bestimmt. Dabei liegen C_i und der Schnittpunkt F_i des betreffenden Kreises c_i mit f stets auf einer zu Π_3 parallelen Erzeugenden p_i des durch k und f bestimmten orthogonalen Paraboloides Ψ (Nr. 1). Dieses enthält auch das von K auf f gefällte Lot als Scheitelerzeugende p_t und hat eine Erzeugende h des Zylinders ζ zur zweiten Scheitelerzeugenden. Damit kann jede einzelne Fläche Ω des betrachteten Büschels zeichnerisch bequem festgehalten werden. U. a. ist der von den Mitten D_i der Kreise c_i erfüllte *Durchmesser* d von Ω unmittelbar gegeben (Abb. 3).

Ψ bildet im allgemeinen zugleich *das einzige im Flächenbüschel vorhandene Paraboloid.* Es ergibt sich auch für e_s als Ferngerade oder für $f_t = h$. Wird die Haupterzeugende f_t insbesondere durch einen der beiden Schnittpunkte M, N von f mit k oder in die a gegenüberliegende Erzeugende des Zylinders ζ gelegt, so erhält man die beiden *im Büschel enthaltenen orthogonalen Kegel,* bzw. ein orthogonales Hyperboloid, das in der Symmetrieachse s von k seine längere reelle Achse m hat.

Bezeichnen nun O_1, O_2 irgend zwei adjungierte Punkte der Kurve k (die also zu deren Scheitel K symmetrisch liegen), so sind auf jeder durch k und f legbaren Fläche Ω die beiden durch O_1, bzw. O_2 gehenden Erzeugenden der Unisekantenschar von k nach 1 adjungiert. *Beschreibt* f_t *den Drehzylinder* ζ, *d. h. durchläuft die Fläche* Ω *das lineare Büschel, so erfüllen diese* (f und f_t schneidenden) *adjungierten Erzeugenden* e_1, e_2 *die Ebenen* $\varrho_1 = [O_1 f]$ bzw. $\varrho_2 = [O_2 f]$ *und bilden darin kongruente Strahlbüschel.* Das Letztere ist wie folgt einzusehen: Der gerade kubische Kreis k wird aus den beiden Punkten O_1, O_2 durch untereinander *kongruente orthogonale Kegel* ω_1, ω_2 projiziert, von welchen jeder eine zur Asymptote a von k parallele und eine durch K gehende Haupterzeugende besitzt. *Beide Kegel* ω_1 und ω_2 *kommen* daher mit in der Kongruenz entsprechenden Erzeugenden *zur Deckung,* wenn man den einen festhält und den anderen *jener Verschraubung um* a *unterwirft, welche die Kegelscheitel* O_1, O_2 *ineinander überführt.* Weil dabei insbesondere die zu den Schnittpunkten M, N von f mit k führenden Kegelerzeugenden m_1, m_2 und n_1, n_2 (die in Abb. 3 bloß im Grund- und Aufriß eingezeichnet sind) zusammenfallen, gilt stets $\sphericalangle\, m_1 n_1 = \sphericalangle\, m_2 n_2$ und die *Verbindungsebenen* ϱ_1 ϱ_2 *von* O_1, *bzw.* O_2 *mit der Bisekante* f *sind gegen* a (und Π_3) *gleich geneigt.* Andererseits bilden die Kreuzrisse von e_1 und e_2 für die verschiedenen Flächen Ω kongruente Strahlbüschel (s. Abb. 3), so daß diese Erzeugendenpaare tatsächlich auch im Raum innerhalb

der Ebenen ϱ_1 bzw. ϱ_2 kongruente Strahlbüschel erfüllen. In Abb. 4 sind zwei Flächen eines solchen Büschels in einem allgemeinen Schrägriß auf eine der gemeinsamen Kreisschnittebenen anschaulich dargestellt[6].

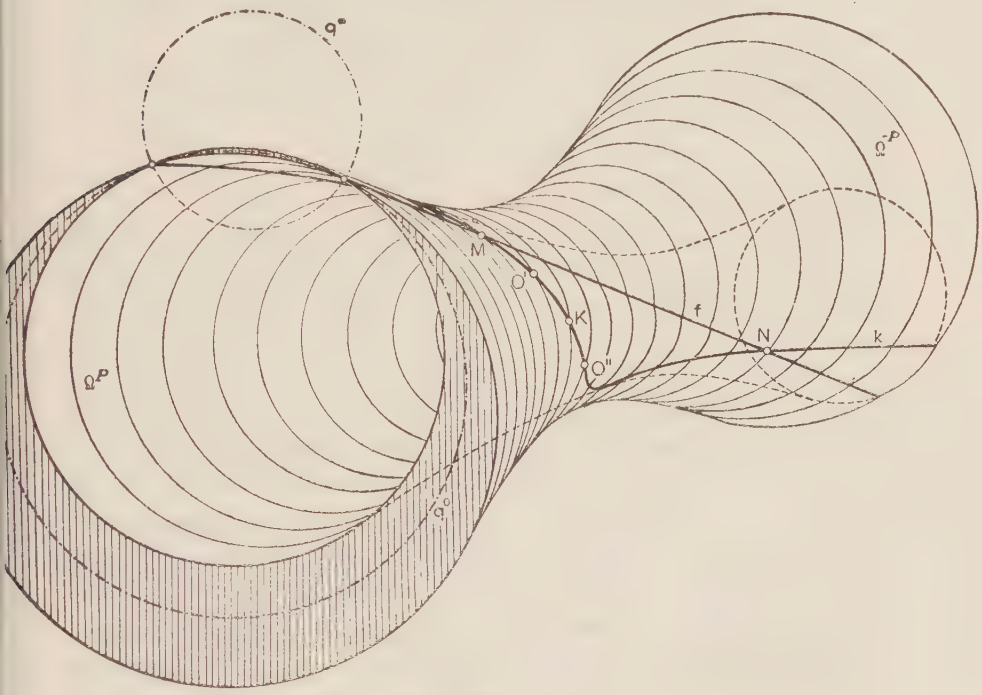

Abb. 4.

Um das betrachtete Flächenbüschel auch analytisch darzustellen, nehmen wir den Kurvenscheitel K als Ursprung eines rechtwinkligen Koordinatensystems an, seine x-Achse parallel zur Asymptote a und die z-Achse in der Symmetrieachse s von k (s. Abb. 3). Alle ∞^2 orthogonalen Regelflächen zweiten Grades mit einer Gleichung von der Form

$$A\,(y^2+z^2) + B\,x\,y + C\,x\,z + 2\,a\,C\,x - C\,p\,y + (Bp + 2aA)\,z = 0, \quad (1)$$

worin bloß die Verhältnisse $A : B : C$ wesentlich sind, enthalten sodann den kubischen Kreis k mit den Gleichungen

---

[6] Man vergleiche hiezu die anschauliche Darstellung des besonderen Flächenbüschels, das in Abb. 4 der mit Fußn. 1 zitierten Arbeit wiedergegeben ist.

$$\left.\begin{aligned} y^2 + z^2 + 2\,a\,z &= 0 \\ p\,y &= (z + 2a)\,x \end{aligned}\right\}. \tag{2}$$

Schneidet man nämlich eine solche Fläche (1) mit dem Paraboloid Φ, das durch die zweite der Gleichungen (2) bestimmt ist, so ergibt sich

$$(A\,z + p\,B + 2\,a\,A)\,(y^2 + z^2 + 2\,a\,z) = 0, \tag{3}$$

d. h. Φ hat mit (1) tatsächlich die Kurve (2) und die Erzeugende

$$y = -\frac{B}{A}\,x,\quad z = -\frac{B}{A}\,p - 2\,a \tag{4}$$

gemeinsam.

Aus der zweidimensionalen Mannigfaltigkeit von Flächen Ω von der Gleichung (1) greifen wir jetzt jene ∞^1 heraus, die eine beliebig angenommene Bisekante f von k als Erzeugende enthalten. Da durch jeden Raumpunkt genau eine Bisekante von k geht[7], genügt es auch, solche Flächen Ω zu betrachten, die einen außerhalb k befindlichen Punkt gemeinsam haben. Soll f beispielsweise die (von $1:0:0$ verschiedenen) Richtungsparameter $U:V:W$ besitzen, so wäre wegen (1)

$$A\,(V^2 + W^2) + B\,U\,V + C\,U\,W = 0 \tag{5}$$

oder

$$C = -\frac{V^2 + W^2}{U\,V}\,A - \frac{V}{W}\,B \tag{6}$$

zu setzen. Nach dem Einfügen von (6) in Gleichung (1) bestimmt diese ∞^1 den verschiedenen Werten von $A:B$ entsprechende Flächen Ω und diese erfüllen das in Rede stehende lineare Büschel[8].

3. Allgemeinste Verlagerung zweier Zielstrahlbündel.

Wir verwenden im folgenden einige einfache geometrische Tatsachen und definieren vor allem als *Parallaxe P zweier windschiefen Geraden* p', p'' *in einer Raumrichtung* r den Abstand dieser Geraden, der längs der zu r parallelen gemeinsamen Treffgeraden t von p' und p'' gemessen wird[9] (s. Abb. 5). Bezeichnen T' und T'' die Schnittpunkte von t mit p', bzw. p'', so ist also $P = \overline{\mathsf{T}'\,\mathsf{T}''}$. Diese Größe ist offenbar $= 0$, wenn

---

[7] Siehe wieder Enzykl. Math. Wissensch. III C 2 (*O. Staude*), Nr. 92.

[8] Auf anders geartete lineare Büschel von orthogonalen Regelflächen zweiten Grades kommen wir noch in einem anderen Zusammenhang zurück.

[9] Man vergleiche hiemit: *J. Krames*, Über Parallaxeneigenschaften windschiefer Geraden, Sitzgsber. Akad. Wiss. Wien, mat.-nat. IIa, 156 (1947), S. 219—232, wo diese Eigenschaften erstmalig abgeleitet wurden.

$\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{p}''$ sich im Raume schneiden. Für die Sonderfälle $\mathfrak{r} \parallel \mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{r} \parallel \mathfrak{p}''$ gibt es ∞^1 zu $\mathfrak{p}'$ bzw. $\mathfrak{p}''$ parallele Treffgeraden $\mathfrak{t}$ und es ist $P = \infty$.

Sind zwei *parallele Ebenen* α' und α'' gegeben, zu welchen die Raumrichtung $\mathfrak{r}$ nicht parallel ist, *so hat jede eigentliche Gerade* $\mathfrak{p}'$ *in* α' *mit jeder Geraden* $\mathfrak{p}''$ *in* α'' *in der Richtung* $\mathfrak{r}$ *dieselbe Parallaxe* P (Abb. 5). Dies gilt insbesondere auch für je zwei zueinander parallele Geraden $\mathfrak{v}'$, $\mathfrak{v}''$ innerhalb α' bzw. α''. Hiezu sei jedoch bemerkt, daß durch je *zwei parallele Geraden* $\mathfrak{v}'$, $\mathfrak{v}''$ zugleich ∞^1 Paare paralleler Ebenen gelegt werden können, *so daß die Parallaxe* P solcher Geraden in derselben (oder irgend einer anderen) Richtung $\mathfrak{r}$ *jeden beliebigen reellen Wert annimmt.* Gleiches gilt ferner für je zwei sich schneidende Geraden $\mathfrak{u}'$, $\mathfrak{u}''$, wenn deren Verbindungsebene zu $\mathfrak{r}$ parallel ist. *Danach ist* $P = 0$ *ein allgemeines Kennzeichen für das „Sich-Schneiden" zweier Raumgeraden* $\mathfrak{p}'$ *und* $\mathfrak{p}''$. Für $\mathfrak{r} \parallel \alpha' \parallel \alpha''$ hat jede Gerade $\mathfrak{p}'$ in α' mit jeder Geraden $\mathfrak{p}''$ in α'' dieselbe Parallaxe $P = \infty$.

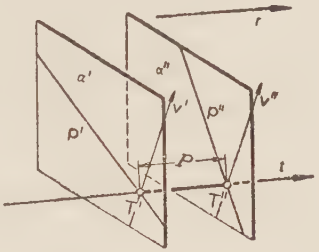

Abb. 5.

Wir betrachten nun zwei Strahlbündel mit den reellen, getrennten Scheiteln O', O'', weiters eine Raumrichtung $\mathfrak{r}$, die zur Verbindungsgeraden $\mathfrak{k}' = \mathfrak{k}''$ von O', O'' nicht parallel ist (s. Abb. 6), und schließlich das Parallelogramm $O'\,A'\,O''\,A''$, dessen zu $\mathfrak{r}$ parallele Gegenseiten $O'\,A'$ und $A''\,O''$ die gerichtete Länge P haben. Durch $\mathfrak{a}' = [O'\,A'']$ und $\mathfrak{a}'' = [O''\,A']$ seien ferner irgend zwei parallele Ebenen α', α'' gelegt. *Jeder Bündelstrahl* $\mathfrak{p}'$ *durch* O', *der* α' *angehört, hat sodann mit jedem Strahl* $\mathfrak{p}''$ *durch* O'' *innerhalb* α'' nach obigem *in der Richtung* $\mathfrak{r}$ *dieselbe Parallaxe* P. Umgekehrt befinden sich auch *je zwei Strahlen* $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$ *der Bündel* O', O'', *die in der Richtung* $\mathfrak{r}$ *die Parallaxe* P *haben, stets in zwei bestimmten Parallelebenen* α', α'' *durch* $\mathfrak{a}'$, *bzw.* $\mathfrak{a}''$. Alle möglichen Ebenenpaare α', α'' dieser Art erfüllen die *mittels paralleler Ebenen kongruent aufeinander bezogenen Ebenenbüschel* mit den Achsen $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}''$.

Mithin gibt es insgesamt ∞^3 Strahlenpaare $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$ durch O', O'' mit derselben Parallaxe P in der gegebenen festen Richtung $\mathfrak{r}$. Sie bilden zugleich die ∞^3 *Paare konjugierter Strahlen* einer zwischen den

Bündeln O', O'' bestehenden *ausgearteten Korrelation*[10]. Darin entspricht jedem Strahl p' (p'') durch O' (O'') die zu ihm parallele Ebene α'' (α') durch die Gerade a'' (a'). Die Korrelation enthält insbesondere ∞^2 Strahlenpaare, die sich schneiden, nämlich die ∞^2 Paare u', u'' innerhalb der (zu r parallelen) Verbindungsebene $\varrho' = \varrho''$ von a' und a'' (Abb. 6) und die ∞^2 Paare untereinander *paralleler* Strahlen v', v''

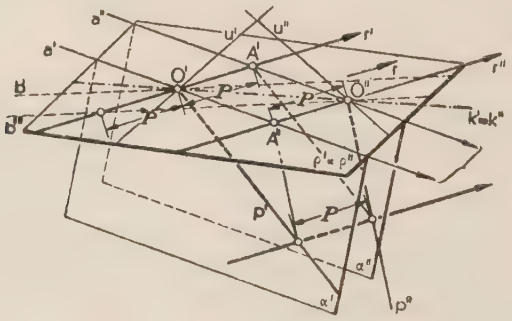

Abb. 6.

der beiden Bündel. Die Schnittpunkte dieser besonderen Paare erfüllen demnach die Ebene $\varrho' = \varrho''$ und die Fernebene ω, also eine zerfallende orthogonale Regelfläche zweiten Grades (**1**).

Läßt man P alle möglichen reellen Werte annehmen, so bilden die paarweise parallelen Geraden a', a'' innerhalb $\varrho' = \varrho''$ *kongruente Strahlbüschel* (s. Abb. 6), wobei aber zu jedem Geradenpaar $a' \parallel a''$ eine *andere* Korrelation der genannten Art gehört. Wir fügen hier noch hinzu: *Alle Paare konjugierter Strahlen einer solchen Korrelation haben* nicht bloß in der betrachteten Raumrichtung r sondern *in jeder der* ∞^1 *zur Ebene* $\varrho' = \varrho''$ *parallelen Richtungen jeweils dieselbe Parallaxe* P, *und zwar für je zwei dieser Richtungen eine andere.* Denn, werden O',

---

[10] Verschiebt man z. B. das Bündel mit dem Scheitel O' in der Raumrichtung r durch die Strecke P, so geht diese Korrelation genau in jene über, die bereits in „Z E", Nr. 6, in Betracht gezogen wurde. — Bei dieser Gelegenheit sei noch besonders hervorgehoben, daß die Bezeichnungsweise „*konjugierte Strahlen*" zweier Bündel von uns immer nur verwendet wird, wenn ∞^3 Strahlenpaare in Frage kommen. Sind hingegen ∞^2 solche Paare vorhanden, so sprechen wir von „*zugeordneten Strahlen*", z. B. wenn sich die Strahlen dieser Paare in den Punkten einer gegebenen Fläche schneiden. Sind schließlich bloß ∞^1 Bündelstrahlenpaare in Betracht zu ziehen, so handelt es sich um „*entsprechende*" Erzeugenden (Geraden) zweier in den Bündeln enthaltener Kegelflächen (Strahlbüschel).

O'', a' und a'' festgehalten, während r die zu $\varrho' = \varrho''$ parallele Stellung durchläuft, so wandern die Gegenecken A', A'' des Parallelogrammes $O'\,A'\,O''\,A''$ (s. Abb. 6) auf dessen festliegenden Gegenseiten a', a''. Unter allen dabei möglichen Werten von $P = \overline{O'\,A'} = \overline{O''\,A''}$ bildet nun jener ein *Minimum*, welcher bei der *zu* $a' \parallel a''$ *normalen Richtung* r^n auftritt. Hingegen gehört zu $r \parallel a' \parallel a''$ das Maximum dieser Parallaxe $P = \infty$. Eine Ausnahmestellung nimmt ferner die zur Kernachse $k' = k'' = [O'\,O'']$ parallele Raumrichtung ein, bei der je zwei windschiefe Bündelstrahlen p', p'' die Parallaxe $P = b = \overline{O'\,O''}$, und je zwei sich schneidende Strahlen p', p'' jede beliebige Parallaxe aufweisen. *Für je zwei zu* r^n *symmetrische*, d. h. gegen $a' \parallel a''$ gleich geneigte (und zu $\varrho' = \varrho''$ parallele) Raumrichtungen r ergibt sich schließlich *immer dieselbe Parallaxe P.*

Wir denken uns nunmehr die beiden Strahlbündel O', O'' *als starre Gebilde unter Aufrechterhaltung einer der oben erklärten Zuordnungen konjugierter Bündelstrahlen in allgemeinster Weise gegeneinander verlagert.* Die Ausgangslage, in der jeder Strahl p' mit seinem konjugierten p'' in einer bestimmten Richtung r die gegebene Parallaxe P hat, soll kurz als *P-Lage* der Bündel bezeichnet werden. Wir zeigen sogleich: *In jeder anderen gegenseitigen Lage dieser Bündel gibt es immer wieder* ∞^2 *konjugierte Paare* p', p'' *der vorliegenden Korrelation, die sich schneiden, und zwar erfüllen die zugehörigen Schnittpunkte* X *dieser Paare stets eine orthogonale Regelfläche zweiten Grades* Ω^P (oder eine Ausartungsform einer solchen). In der Tat können diese Punkte X nur auf den Schnittgeraden der neuen Lagen $\alpha^{0'}$, $\alpha^{0''}$ je zweier ursprünglich paralleler Ebenen α', α'' liegen, und diese verlagerten Ebenenpaare $\alpha^{0'}$, $\alpha^{0''}$ bilden abermals *kongruente Ebenenbüschel* (wegen deren Erzeugnis s. **1**).

Die neue Lage der Bündel soll kurz „*Nullage*" heißen. Sie entspricht für die praktischen Anwendungen dieser Betrachtungen in der Photogrammetrie der *Aufnahmestellung* des betreffenden Luftbildpaares, die *P*-Lage der *Nebenlösung*[11]. Mit Rücksicht auf diesen Zusammenhang

[11] Näheres über die Nebenlösung findet sich in „Z E", Nr. 4, Satz 2, 3a und Nr. 5, sowie in einigen weiteren Arbeiten des Verfassers, die u. a. später in Fußn. 18 noch aufgezählt werden. — Daß die im Text genannten Punkte X eine orthogonale Regelfläche zweiten Grades erfüllen, bestätigt sich auch sehr einfach aus der Erwägung, daß bei der allgemeinen gegenseitigen Verlagerung der beiden Bündel das mit dem Scheitel O' zuerst der in Fußn. 10 geschilderten Verschiebung unterworfen werden kann, wonach der in „Z E", Nr. 6, betrachtete Fall herbeigeführt ist.

benennen wir in der Folge die von einem Raumpunkt X herrührenden Aufnahmestrahlen (wie in der Photogrammetrie) als *Zielstrahlen.*

Geht man umgekehrt von der Nullage zweier Zielstrahlbündel *mit den getrennten Scheiteln* $O^{0'}$, $O^{0''}$ *aus*, so gibt es hier stets zwei kongruente Ebenenbüschel, denen in der P-Lage jene beiden Büschel paarweise paralleler Ebenen α', α'' entsprechen, deren untereinander parallele Achsen $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}''$ in der Raumrichtung $\mathfrak{r}$ die Entfernung P haben. *Bezeichnet man nun je zwei Bündelstrahlen* $\mathfrak{z}^{0'}$, $\mathfrak{z}^{0''}$ *der Nullage, die sich in irgend einem Punkt* X *schneiden* ($P = 0$), *als konjugierte Zielstrahlen*, so sind demnach unter diesen ∞^3 Paaren stets ∞^2 von folgender Beschaffenheit vorhanden: *Aus ihnen gehen bei der Rückverlagerung der Bündel solche Strahlen* $\mathfrak{z}'$, $\mathfrak{z}''$ *hervor, die in der Raumrichtung* $\mathfrak{r}$ *die vorgegebene Parallaxe* P *haben.* Hieraus folgt nach obigem: Die in der Nullage auftretenden Schnittpunkte dieser besonderen ∞^2 Strahlenpaare $\mathfrak{z}^{0'}$, $\mathfrak{z}^{0''}$ erfüllen wieder das Erzeugnis zweier kongruenten Ebenenbüschel, also eine (im allgemeinen nicht zerfallende) orthogonale Regelfläche zweiten Grades Ω^P, wobei $O^{0'}$ und $O^{0''}$ stets an zwei adjungierte Erzeugenden dieser Fläche Ω^P gebunden sind[12].

Wird die Nullage und die P-Lage wie auch die Raumrichtung $\mathfrak{r}$ festgehalten und durchläuft P *alle möglichen reellen Werte*, so erhält man ∞^1 orthogonale Regelflächen zweiten Grades Ω^P, die ein *lineares Büschel* von der in Nr. 2 besprochenen Art bilden. Das Letztere ergibt sich u. a. wie folgt: Irgend zwei verschiedene Flächen Ω^P können nur solche Raumpunkte X gemeinsam haben, deren zugeordnete Zielstrahlen $\mathfrak{z}^{0'}$, $\mathfrak{z}^{0''}$ nach der Bündelverlagerung in der Richtung $\mathfrak{r}$ zugleich zwei *verschiedene*, also unendlich viele Parallaxen P aufweisen. Nun findet sich in der Nullage innerhalb der beiden Bündeln je eine Ebene $\varrho^{0'}$ bzw. $\varrho^{0''}$, zu denen in der P-Lage dieselbe durch O' und O'' gehende und *zu* $\mathfrak{r}$ *parallele Kernebene* $\varrho' = \varrho''$ gehört ($\varrho^{0'}$, $\varrho^{0''}$ sind entsprechende Ebenen der erwähnten kongruenten Büschel). Wird die Schnittgerade von $\varrho^{0'}$ und $\varrho^{0''}$ mit $\mathfrak{f}$ bezeichnet, so gibt es ∞^1 Paare entsprechender Bündelstrahlen $\mathfrak{u}^{0'}$, $\mathfrak{u}^{0''}$, die sich in den Punkten von $\mathfrak{f}$ treffen. Durch den Übergang zur P-Lage der Bündel fallen diese Paare $\mathfrak{u}^{0'}$, $\mathfrak{u}^{0''}$ in die Ebene $\varrho' = \varrho'' = [O'\ O'' \parallel \mathfrak{r}]$ und haben daher in der Richtung $\mathfrak{r}$ eine unbestimmte Parallaxe P (s. oben). *Somit gehört* $\mathfrak{f}$ *jeder der* ∞^1 *Flächen* Ω^P *an.* Sucht man ferner in der Nullage jene Strahlenpaare $\mathfrak{v}^{0'}$, $\mathfrak{v}^{0''}$, die beim Übergang zur P-Lage untereinander parallel werden,

[12] Siehe „Z E", Nr. 6, Satz 5 und 5a.

so kann man auch umgekehrt unter den ∞^2 paarweise parallelen Bündelstrahlen v', v'' der P-Lage jene herausgreifen, denen in der Nullage *sich schneidende Strahlen* entsprechen. Nun gibt es bekanntlich stets ∞^1 solche Paare, *und zwar ergeben ihre in der Nullage vorhandenen Schnittpunkte* X *im allgemeinen einen geraden kubischen Kreis* k, nämlich den zu den ausgeführten Bündelbewegungen gehörigen *Horopter*[13]. Weil parallele Strahlenpaare v', v'', wie bereits früher bemerkt, ebenfalls jede beliebige Parallaxe P haben, liegt auch diese Kurve k zugleich auf allen Flächen Ω^P, und dies bestätigt, *daß diese orthogonal* sind (1) und ein *lineares Büschel* von der Form (1), (6) erfüllen. Die Grundkurve dieses Büschels besteht in der Tat aus dem geraden kubischen Kreis k und der Geraden f, die eine *Bisekante* von k ist. Das Letztere stimmt damit überein, daß die ∞^1 Paare von Strahlen u', u'', die sich sowohl *innerhalb* $\varrho' = \varrho''$ befinden als auch *parallel* sind, zwei kongruente Strahlbüschel erfüllen, deren Nullagen auf f projektive Punktreihen ausschneiden; die Doppelpunkte M und N dieser Reihen sind Schnittpunkte entsprechender Strahlen $m^{0'}$, $m^{0''}$, bzw. $n^{0'}$, $n^{0''}$ dieser in die Nullage gebrachten Büschel und daher gemeinsame Punkte von k und $f = [\varrho^{0'}\ \varrho^{0''}]$. In M, N liegen zugleich die Scheitel der beiden im Flächenbüschel enthaltenen orthogonalen Kegel.

Aus bekannten Eigenschaften des Horopters folgt unmittelbar, daß die *Bündelscheitel* $O^{0'}$, $O^{0''}$ *der Nullage immer in adjungierten Punkten von* k, d. h. symmetrisch zum Kurvenscheitel, liegen. Man erkennt dies auch aus dem Umstand, daß jede Büschelfläche Ω^P insbesondere durch zwei kongruente Ebenenbüschel erzeugt wird, deren Träger zwei durch $O^{0'}$, bzw. $O^{0''}$ gehende adjungierte Erzeugenden von Ω^P sind. Dem in $\varrho' = \varrho''$ befindlichen Strahlenpaar $k' = k''$ (für welches in Abb. 6 $O' = A'$, $O'' = A''$, d. h. $P = 0$ anzunehmen ist) entsprechen in der Nullage insbesondere die adjungierten Erzeugenden $k^{0'}$, $k^{0''}$ einer bestimmten Fläche Ω^0 des linearen Büschels, und diese hat folgende Eigenschaft: *Alle* ∞^2 *Paare zugeordneter Zielstrahlen* $z^{0'}$, $z^{0''}$, *die sich in den Punkten von* Ω^0 *treffen, schneiden sich* ($P = 0$) *auch in der P-Lage, und zwar abermals in den Punkten einer orthogonalen Regelfläche zweiten Grades* Ω^N, d. h. Ω^0 ist eine allgemeine *„gefährliche Fläche"* und Ω^N deren *Verzerrung* in der möglichen *Nebenlösung*[12]. *Letztere ergibt sich zugleich, wenn man die beiden Bündel aus der Nullage in die P-Lage bringt.*

---

[13] Siehe *H. v. Helmholtz*, Poggendorf. Ann. 123 (1862), S. 158, und „Z E", Fußn. 20.

Den zu r parallelen Bündelstrahlen r', r'' der P-Lage (Abb. 6) entsprechen ferner in der Nullage innerhalb der Ebenen $\varrho^{0'}$, $\varrho^{0''}$ die adjungierten Erzeugenden $\mathsf{r}^{0'}$, $\mathsf{r}^{0''}$ einer weiteren Fläche des Büschels. Wir bezeichnen sie mit Ω^{∞}, weil sie die Eigenschaft hat, daß *die zu ihren Punkten gehörigen Paare zugeordneter Zielstrahlen* $\mathsf{z}^{0'}$, $\mathsf{z}^{0''}$, *in die P-Lage übergeführt, in der Richtung* r *die Parallaxe* $P = \infty$ *haben.* Denn diese Paare befinden sich sodann stets in zwei Parallelebenen α', α'', die selbst parallel zu r sind, so zwar, daß A' und A'' (Abb. 6) zu Fernpunkten geworden sind, und die zu r parallelen Treffgeraden solcher Strahlenpaare der Fernebene angehören.

Man erkennt damit an Hand von Abb. 6, daß für zwei Flächen Ω^{P} und Ω^{-P} des linearen Büschels, die zu zwei entgegengesetzt gleichen Parallaxenwerten P und $-P$ gehören, stets folgendes gilt:

Bezeichnen $\mathsf{a}^{0'}$, $\mathsf{a}^{0''}$ *und* $\mathsf{b}^{0'}$, $\mathsf{b}^{0''}$, *die durch* $\mathsf{O}^{0'}$, *bzw.* $\mathsf{O}^{0''}$ *gehenden adjungierten Erzeugenden von* Ω^{P} *und* Ω^{-P}, *so sind die Strahlenquadrupel* $\mathsf{k}^{0'}$, $\mathsf{r}^{0'}$, $\mathsf{a}^{0'}$, $\mathsf{b}^{0'}$ *und* $\mathsf{k}^{0''}$, $\mathsf{r}^{0''}$, $\mathsf{a}^{0''}$, $\mathsf{b}^{0''}$ *stets harmonisch,* d. h. es ist

$$(\mathsf{k}^{0'}\ \mathsf{r}^{0'}\ \mathsf{a}^{0'}\ \mathsf{b}^{0'}) = -1 \quad \text{und} \quad (\mathsf{k}^{0''}\ \mathsf{r}^{0''}\ \mathsf{a}^{0''}\ \mathsf{b}^{0''}) = -1. \tag{7}$$

In Abb. 4 sind neben den Schrägrissen zweier Flächen Ω^{P} und Ω^{-P} eines Büschels (1), (6) auch zwei zugehörige Flächen Ω^{0}, Ω^{∞} durch ihre Kreisschnitte q^{0}, q^{∞} angedeutet.

Zusammenfassend erhalten wir also den[14]

Satz 1: *Nennt man zwei Strahlen zweier Zielstrahlbündel konjugiert, wenn sie sich in irgend einem Raumpunkt schneiden, so gibt es nach jeder gegenseitigen Verlagerung dieser starren Bündel unter den* ∞^3 *Paaren konjugierter Strahlen stets* ∞^2, *die in einer gegebenen (zur Basis nicht harallelen) Raumrichtung* r *dieselbe beliebig angenommene Parallaxe P paben; die Strahlen dieser Paare schneiden sich, in die Ausgangslage zurückgeführt, in den Punkten einer orthogonalen Regelfläche zweiten Grades* Ω^{P}. *Diese bildet also für die genannte Bewegung der Bündel,*

---

[14] Wegen eines Beweises dieses Satzes mittels Tensorrechnung s. *J. Krames*, Parallaxeneigenschaften zweier Sehstrahlbündel, Sitzgsber. Akad. Wiss. Wien, mat.-nat. IIa, 156 (1947), S. 233—246. Zu auffallend ähnlichen Ergebnissen gelangt man auch, wenn die kleinste auf einer waagrechten Bildebene π meßbare y-Parallaxe zugeordneter Zielstrahlen innerhalb π konstant vorausgesetzt wird. Siehe *J. Krames*. Über die Flächen konstanter Bildparallaxe und die zugehörigen gefährlichen Raumgebiete, Anzeiger der öst. Ak. Wiss., math.-nat. Kl., 85 (1948), S. 9—14; *J. Krames*, Über besondere lineare Büschel von Flächen konstanter Bildparallaxe, ebenda, S. 25—31; sowie *J. Krames*, Allgemeine lineare Büschel von Flächen konstanter Bildparallaxe, ebenda, S. 39—48.

kurz gesagt, eine **Fläche konstanter Parallaxe**. *Die Endlagen der genannten* ∞^2 *Strahlenpaare haben überdies in allen* ∞^1 *Raumrichtungen, die der Stellung der zu* r *parallelen Kernebene angehören, jeweils dieselbe Parallaxe P, und zwar in je zwei dieser Richtungen eine andere.*

Für dieselbe Anfangs- und Endlage der Bündel und dieselbe Raumrichtung r *erfüllen die zu den verschiedenen Werten von P gehörigen* ∞^1 *Flächen* Ω^P *ein lineares Büschel mit einem geraden kubischen Kreis und einer seiner Sehnen als Grundkurve. Darin ist insbesondere die* $P = 0$ *entsprechende Fläche* Ω^0 *enthalten, der solche Paare von Strahlen zugeordnet sind, die sich auch in der zweiten Lage der Bündel schneiden, und zwar neuerdings in den Punkten einer orthogonalen Regelfläche zweiten Grades* Ω^N. *Schließlich hat die zu* $P = \infty$ *gehörige Fläche* Ω^∞ *des Büschels die Eigenschaft, daß die nach ihren Punkten zielenden Strahlenpaare durch die Verlagerung der Bündel in solche Paare übergehen, die in je zwei zu* r *parallelen Ebenen liegen.*

Wir zeigen noch, daß auch umgekehrt jedes Flächenbüschel von der Form (1), (6) auf unendlich viele Arten im Sinne obiger Ausführungen mit einer gegenseitigen Verlagerung zweier Zielstrahlbündel zusammenhängt. Als Scheitel $O^{0'}$, $O^{0''}$ dieser Bündel sind jedenfalls *adjungierte Punkte der Grundkurve* k des Büschels anzunehmen. Aus den ∞^1 Paaren sodann durch $O^{0'}$, bzw. $O^{0''}$ gehender adjungierter Erzeugenden $e^{0'}$, $e^{0''}$ der einzelnen Büschelflächen werden diese jeweils durch kongruente Ebenenbüschel projiziert, wobei die Strahlenpaare $e^{0'}$, $e^{0''}$ innerhalb der Verbindungsebenen $\varrho^{0'}$, $\varrho^{0''}$ von $O^{0'}$, $O^{0''}$ mit der gemeinsamen Erzeugenden f der Flächen Ω^P (nach 2) selbst *kongruente Strahlbüschel bilden*. Überdies entsprechen einander die Ebenen $\varrho^{0'}$, $\varrho^{0''}$ in jedem dieser Paare kongruenter Ebenenbüschel. *Hält man eines der Bündel*, etwa $O^{0'}$, *fest und verschraubt man das andere um die Asymptote* a *von* k, *derart, daß* $O^{0''}$ *mit* $O^{0'}$ *zusammenfällt*, so kommen nach 2 auch $\varrho^{0'}$ und $\varrho^{0''}$ und jede Erzeugende $e^{0'}$ mit ihrer adjungierten $e^{0''}$ zur Deckung. Außerdem ist sodann jedes der Ebenenbüschelpaare in zwei *identisch aufeinander bezogene Büschel* übergegangen. Denn bei dieser Verschraubung vereinigen sich neben $\varrho^{0'}$, $\varrho^{0''}$ auch die einander stets entsprechenden Verbindungsebenen von $e^{0'}$, $e^{0''}$ mit dem Fernpunkt F von k wie auch die Verbindungsebenen dieser Geraden $e^{0'}$, $e^{0''}$ mit den Tangenten an k in den Punkten $O^{0'}$, bzw. $O^{0''}$.

Wird das gesamte Bündel $O^{0''}$ *nach der ausgeführten Verschraubung noch in einer Raumrichtung* l, *die zur Ebene* $\varrho' = \varrho''$ *parallel ist, durch eine beliebige Strecke l verschoben, so besteht das vorgelegte Flächenbüschel*

nach dem oben Gesagten und 2 *für jede zu* $\varrho' = \varrho''$ *parallele*[15]*, jedoch von* l *verschiedene Raumrichtung* r im Sinne von Satz 1 *aus* ∞^1 *Flächen konstanter Parallaxe P* (vgl. Abb. 6).

Nach jeder derartigen Verschraubung und darauffolgenden Verschiebung des einen Bündels mit dem Scheitel $O^{0''}$ kann *das gesamte aus beiden Bündeln bestehende Raummodell noch einer beliebigen weiteren Verlagerung* unterworfen werden. Wurde die Schubstrecke l von der ursprünglichen Basisstrecke $b = \overline{O'\,O''}$ verschieden angenommen, dann ergibt sich bei diesen Bewegungen zugleich eine Änderung der Basislänge b, *so daß damit die allgemeinste gegenseitige Verlagerung der Bündel ausgeführt ist.*

Für $l = b$ kann man das Raummodell insbesondere auch in solche Lagen bringen, daß die Bündelscheitel der P-Lage mit den Scheiteln der Nullage zusammenfallen. *Die endgültige gegenseitige Verlagerung der Bündel läßt sich sodann unmittelbar durch gewisse Verdrehungen der Zielstrahlbündel um bestimmte Achsen* $d^{0'}$, $d^{0''}$, die durch $O^{0'}$, bzw. $O^{0''}$ gehen, *herbeiführen* (und zwar auf ∞^1 Arten). Dieser Sonderfall entspricht dem „*Verfahren der unabhängigen Bildpaare (Winkelverfahren)*" der photogrammetrischen Praxis. Man bestätigt in diesem Zusammenhang unschwer die vom Verfasser bereits früher abgeleiteten Sätze über diese Bündelverdrehungen[16], z. B. den, daß hier zusammengehörige Drehachsen d', d'' insgesamt *vier Paare projektiver Strahlbüschel* erfüllen. Wird hingegen auf obige zusätzliche Verlagerung des Raummodells verzichtet, so bleibt das Bündel $O^{0'} = O'$ im Raume unverändert, wie dies in der Praxis beim „*Verfahren des Folgebildanschlusses*" vorgesehen ist.

Da bei den oben geschilderten allgemeinen Bewegungen des Bündels $O^{0''}$ durch die (zu $\varrho' = \varrho''$ parallele) Verschiebungsrichtung l jene beiden Büschelachsen $k^{0'}$, $k^{0''}$ der Nullage bestimmt sind, denen in der P-Lage die Achsen $k' = k'' \parallel l$ entsprechen (Abb. 6), kann auch umgekehrt innerhalb der Strahlbüschel $O^{0'}$ $(e^{0'}) \simeq O^{0''}$ $(e^{0''})$ das Strahlenpaar $k^{0'}$, $k^{0''}$ *beliebig angenommen werden.* Gleiches gilt für das

[15] Daß diese Parallaxeneigenschaft der beiden Bündel gleichzeitig für ∞^1 zu $\rho' = \rho''$ parallele Raumrichtungen r zutrifft, steht im Einklang mit einem allgemeinen Satz, den der Verfasser in der mit Fußn. 9 angef. Arbeit (und zwar in Nr. 1, Satz 6) bereits auf anderem Wege abgeleitet hat.

[16] *J. Krames*, Über die mehrdeutigen Orientierungen zweier Sehstrahlbündel und einige Eigenschaften der orthogonalen Regelflächen zweiten Grades, Monatsh. Math. Phys. 50 (1941), S. 65—83, insbes. Satz 1 bis 3.

Strahlenpaar $\mathsf{r}^{0'}$, $\mathsf{r}^{0''}$, das durch die zu $\varrho' = \varrho''$ parallele Raumrichtung r festgelegt ist. Daraus folgt letzten Endes der:

Satz 2: *Jedes lineare Büschel von orthogonalen Regelflächen zweiten Grades Ω^P mit einem geraden kubischen Kreis* k *und einer seiner Sehnen als Grundkurve besteht im Sinne von Satz* 1 *aus Flächen konstanter Parallaxe. Dabei können die Aufnahmezentren* $\mathsf{O}^{0'}$, $\mathsf{O}^{0''}$ *als adjungierte Punkte von* k, *ferner innerhalb des Büschels die Grundfläche Ω^0 und die davon verschiedene Fläche Ω^∞ willkürlich ausgewählt werden. Die gegenseitige Verlagerung der Bündel und die Raumrichtung* r *sind dadurch, abgesehen von Basisänderungen und Bewegungen des gesamten Raummodells, eindeutig bestimmt.*

4. Die Begrenzungsflächen der allgemeinen „gefährlichen Raumgebiete".

Die zu zwei entgegengesetzt gleichen Parallaxenwerten P und $-P$ gehörigen Flächen Ω^P und Ω^{-P} eines linearen Büschels von der Form (1), (6) teilen den Raum in zwei Gebiete $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$, von denen das eine die $P = 0$ entsprechende Fläche Ω^0, das andere die $P = \infty$ zugeordnete Fläche Ω^∞ enthält. Für allgemeine Annahmen bestehen diese beiden Gebiete aus mehreren (höchstens vier) getrennten Teilen, die längs k und f aneinander grenzen; einer von ihnen ist im Endlichen geschlossen, während die übrigen bis an die Fernebene reichen (s. Abb. 4). Das erstgenannte Gebiet $\mathfrak{G}$ wird von den Punkten aller Büschelflächen ausgefüllt, deren zugehörige Parallaxenwerte zwischen $-P$ und P liegen. Hingegen liegen die Parallaxen der in $\mathfrak{H}$ enthaltenen Flächen Ω^P außerhalb dieser Schranken. Ω^0 ist die „*Grundfläche*" des Gebietes $\mathfrak{G}$. Bei photographischen Aufnahmen aus zwei adjungierten Punkten O', O'' von k kommen naturgemäß immer nur bestimmte, von den Aufnahmerichtungen und den Öffnungswinkeln der Objektive abhängige Ausschnitte von $\mathfrak{G}$ zur Abbildung.

Wird $|P|$ gleich der kleinsten y-Parallaxe angenommen, die im verwendeten Auswertgerät gerade noch feststellbar ist, so bildet $\mathfrak{G}$ ein „*gefährliches Raumgebiet*" von folgender grundlegender Eigenschaft: *Alle Zielstrahlenpaare* $\mathsf{p}^{0'}$, $\mathsf{p}^{0''}$, *die von irgendwelchen innerhalb $\mathfrak{G}$ befindlichen Geländepunkten herrühren, erhalten nach der gegenseitigen Verlagerung der beiden starren Zielstrahlbündel in die P-Lage durchwegs y-Parallaxen, die zwischen den Grenzen $-P < d\,p_y < P$ liegen.*

Die Gebiete von dieser Art stellen *(für ein im Raum konstantes P)* bereits die *allgemeinsten „gefährlichen Raumgebiete"* dar, weil bei obigem

Übergang von der Nullage zur P-Lage die allgemeinsten Bewegungen in Betracht gezogen wurden. Überdies gehören die diesen Gebieten zu Grunde liegenden Flächen Ω^0 zu den *allgemeinsten „gefährlichen Flächen"*, bei denen die *Hauptaufgabe der Photogrammetrie neben der richtigen Orientierung noch eine davon* (in hinreichendem Ausmaß) *verschiedene Nebenlösung aufweist*[17]. Hiebei sei noch besonders hervorgehoben, daß *jede beliebig geformte Geländefläche, die* (im aufgenommenen Bereich) *innerhalb eines derartigen „gefährlichen Raumgebietes" verläuft, für die gegenseitige Orientierung der beiden Bilder genau dieselbe Rolle spielt wie die dem Gebiet zu Grunde gelegte „gefährliche Fläche" selbst.*

Um sich die Mannigfaltigkeit aller derartigen Raumgebiete klar zu machen, die für je zwei im Raum angenommene Aufnahmezentren O′, O″ möglich sind, hat man vorerst zu bedenken, daß ein gerader kubischer Kreis k durch O′, O″ und seine reelle Asymptote a eindeutig bestimmt ist. k ergibt sich u. a. als Schnitt des Drehzylinders ζ durch O′, O″ und a mit dem Paraboloid Φ (**1**), das O′ und O″ enthält und a zur Scheitelerzeugenden hat. Da jedoch O′ und O″ symmetrisch zum Scheitel K von k liegen müssen, kann a nicht beliebig im Raum gegeben sein, sondern nur als eine Gerade, welche eine der ∞^1 im Mittelpunkt der Basisstrecke O′ O″ errichteten Normalen zur Basis rechtwinklig schneidet. Die Asymptote a kann daher ∞^3 räumliche Lagen einnehmen. *Mithin gibt es auch ∞^3 gerade kubische Kreise* k, *auf welchen* O′ *und* O″ *in zwei adjungierten Punkten liegen.* Weil schließlich jede Kurve k ∞^2 Bisekanten f besitzt, *gehören also zu je zwei Zentren* O′, O″ *insgesamt ∞^5 lineare Büschel von der Form* (1) *und* (6). *Die Flächen Ω^P dieser Büschel begrenzen* nach Satz 1 und 2 *zu je zweien, und zwar je nach der Größe der y-Parallaxe $\pm d\,p_y$, eines der allgemeinsten „gefährlichen Raumgebiete"*. Andererseits folgt aus Bemerkungen in **3**, daß durch Annahme eines solchen Flächenbüschels und der darin enthaltenen Grundfläche Ω^0 die gegenseitige Verlagerung der beiden Bündel bereits bestimmt ist. *Dies gibt also z. B. bei festgehaltenen Bündelscheiteln einschließlich der Verdrehungen um die Kernachse* [O′ O″] *insgesamt ∞^6 Möglichkeiten.* Tatsächlich kann jedes der Bündel um seinen Scheitel in je ∞^3 verschiedene Lagen verdreht werden.

Diese Überlegungen erhärten die besondere Wichtigkeit der vom Verfasser in der vorliegenden und in zwölf vorangegangenen

---

[17] Siehe „Z E", Nr. 6, Satz 6 und 7.

Veröffentlichungen[18] erstmalig gewonnenen und von Grund auf klargestellten geometrischen Erkenntnisse für die photogrammetrische Praxis. Für diese hängt die *tatsächliche „Gefährlichkeit" dieser Raumgebiete noch wesentlich davon ab, ob die beim Übergang von der Nullage zur P-Lage auszuführenden Bündelbewegungen ihrem Ausmaß nach gewisse* (von den Beobachtungsmöglichkeiten im Flugzeug abhängige) *Grenzen überschreiten oder nicht überschreiten.* Im ersteren Falle kann nämlich auf Grund der im Flugzeug registrierten Aufnahmedaten unmittelbar erkannt werden, welche der beiden möglichen Lösungen die richtige Orientierung und welche die Nebenlösung darstellt[19].

In einer weiteren Arbeit soll auf die Abmessungen der allgemeinen „gefährlichen Raumgebiete" und deren wichtigste Sonderfälle eingegangen werden, vor allem auf jene, die nach dem soeben Gesagten auch in praktischer Hinsicht von Bedeutung sind. Von Interesse sind dabei vor allem jene Grenzfälle, die sich von den in der eingangs zitierten Arbeit[1] untersuchten Sonderfällen nur wenig unterscheiden[20].

---

[18] Es sind dies neben den in Fußn. 1, 2, 9, 14, 16 und 19 genannten Arbeiten folgende: *J. Krames*, Neue Nebenlösungen einer alten Aufgabe, Anzeiger der Akad. Wiss. Wien, mat.-nat. Kl. 77 (1940), S. 26—30 (der hierin wiedergegebene vorläufige Bericht war bereits am 12. I. 1938 der Akademie zwecks Wahrung der Priorität vorgelegt worden), ferner: *J. Krames*, Über bemerkenswerte Sonderfälle des „Gefährlichen Ortes" der photogrammetrischen Hauptaufgabe, Monatsh. Math. Phys. 50 (1941), S. 1—13; *J. Krames*, Der einfachste Übergang zur Nebenlösung bei vorliegendem „gefährlichen Ort", Monatsh. Math. Phys. 50 (1941), S. 84—100; *J. Krames*, Über die bei der Hauptaufgabe der Luftphotogrammetrie auftretenden „gefährlichen Flächen", Bildmessung und Luftbildwesen XVII (1942), S. 1—16; *J. Krames*, Untersuchungen über „gefährliche Flächen" und „gefährliche Räume" mittels des Äroprojektors „Multiplex", Österr. Ing.-Archiv, 2 (1948), S. 123—132, *J. Krames*, Zur Fehlertheorie der gegenseitigen Orientierung zweier Luftaufnahmen, Anzeiger d. Akad. Wien, mat.-nat. Kl. 84 (1947), S. 53—59, und *J. Krames*, Die Bedeutung der „gefährlichen Raumgebiete" für das optisch-mechanische Orientieren von Luftaufnahmen, Photograph. Korr. 84 (1948), S. 41—50.

[19] Siehe auch *J. Krames*, a. a. O., Österr. Ing.-Archiv 2 (1948), S. 126 f, sowie *K. Killian*, Über die bei der gegenseitigen Orientierung von Luftbildern vorkommenden gefährlichen Flächen und „gefährlichen Räume", Photogr. Korrespondenz, Wien, 81 (1945), S. 13—23.

[20] Man vgl. hiezu Fußnote 19 und die Schlußbemerkung in der mit Fußn. 1 zitierten Abhandlung des Verfassers, wonach alle für die Praxis in Frage kommenden „gefährlichen Raumgebiete" nur innerhalb enger Grenzen von den in der genannten Abhandlung besprochenen Sonderfällen verschieden sein können. Für das Studium der mit den Projektorenbewegungen verknüpften „gefährlichen Raumgebiete" (siehe Satz 1 des Textes) fällt jedoch diese Einschränkung weg.

Zur mechanischen Kubatur.

Von
Johann Radon, Wien.

(Eingelangt am 19. Jänner 1948.)

P. Appell hat 1890[1] den Versuch gemacht, die Gauß'sche Methode der mechanischen Quadratur auf Doppelintegrale zu übertragen, und zwar für beliebige Integrationsbereiche. Wie zu erwarten, spielen dabei die Orthogonalpolynome des Bereiches eine analoge Rolle, wie die Legendreschen Polynome bei Gauß. Seine Ergebnisse sind aber im einzelnen wenig befriedigend, da es sehr schwierig scheint, den allgemeinen Ansatz mit Erfolg durchzuführen.

Im folgenden soll ein spezieller Fall des Appellschen Ansatzes möglichst weitgehend durchgeführt werden. Es wird eine Methode entwickelt, die bei beliebiger Gestalt des Integrationsbereiches zu entscheiden gestattet, ob eine Kubaturformel der gesuchten Gestalt existiert und sie gegebenenfalls aufzustellen erlaubt. Unter gewissen Annahmen über die Symmetrie des Integrationsbereiches läßt sich die Rechnung explizit durchführen. Es ergeben sich eine Reihe von Kubaturformeln, die mindestens teilweise neu sind und sich vermutlich für die Anwendung recht gut eignen. Ein Weg zur Fehlerabschätzung wird ebenfalls angegeben.

Die Verallgemeinerung auf Stieltjes-sche Doppelintegrale (mit nicht-negativer Massenbelegung) liegt nahe; die folgenden Betrachtungen gelten unverändert, wenn man von der Belegung voraussetzt, daß aus dem Verschwinden des Integrals über das Quadrat eines Polynoms stets das identische Verschwinden des Polynoms folgt.

Ich beschränke mich darauf, Riemannsche Doppelintegrale zu betrachten, für die der Integrationsbereich D eine quadrierbare beschränkte Menge von positivem Inhalt ist.

---

[1] Ann. Fac. Sciences de Toulouse, Bd. IV, H.

I.

1. Wir machen den Ansatz:

$$\iint_D F(x, y)\, dx\, dy = \sum_{k=1}^{\nu} \mu_k F(x_k, y_k) \tag{1}$$

und wollen die 3ν verfügbaren Parameter (x_k, y_k, μ_k) so bestimmen, daß (1) für Polynome möglichst hohen Grades n richtig ist. Ist n nicht durch 3 teilbar, so ist die Anzahl der Koeffizienten eines Polynoms n-ten Grades

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} = N_n \tag{2}$$

durch 3 teilbar. Es liegt daher nahe, zu versuchen, ob dann eine Formel vom Typus (1) existiert, die mit

$$\nu = \frac{(n+1)(n+2)}{6}$$

Stellen arbeitet und für Polynome bis zum Grad n exakt ist.

Der Fall $n = 1$, $\nu = 1$ ist trivial; er liefert für (x_1, y_1) den Schwerpunkt und für μ_1 den Inhalt von D.

In den beiden nächsten Fällen $n = 2$, $\nu = 2$ und $n = 4$, $\nu = 5$ ist unsere Frage verneinend zu beantworten. Sei nämlich $f = 0$ im Fall $n = 2$ die Gleichung der Verbindungslinie der Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2), im Falle $n = 4$ die Gleichung des (bzw. eines) Kegelschnitts durch die 5 in (1) auftretenden Punkte. Dann ergibt (1) in beiden Fällen:

$$\iint_D f(x\,y)^2\, dx\, dy = 0$$

und damit einen Widerspruch.

2. Als erster nicht-trivialer Fall kommt daher $n = 5$, $\nu = 7$ in Frage. Er soll im folgenden ausschließlich untersucht werden.

Zunächst sieht man nach der soeben verwendeten Schlußweise ein, daß die 7 Punkte $p_k = (x_k, y_k)$ nicht auf einem Kegelschnitt liegen können. Betrachten wir jetzt eine C_3 durch die 7 Punkte. Ihre Gleichung sei $K(x\,y) = 0$ und $Q(x, y)$ ein beliebiges Polynom zweiten Grades. Da (1) für jedes Polynom fünften Grades gelten soll, so folgt:

$$\iint_D K(x, y)\, Q(x, y)\, d\,x\, dy = 0,$$

d. h.: $K(x, y)$ ist zu jedem Polynom zweiten Grades orthogonal[2].

Wir werden so zur Betrachtung der *Orthogonalpolynome* dritten Grades geführt, d. h. der Polynome vom Grad 3, die zu jedem Polynom zweiten Grades orthogonal sind. Es gibt deren 4 linear-unabhängige, die wir so normieren und bezeichnen wollen:

$$P_{30} = x^3 + Q_{30},\ P_{21} = x^2 y + Q_{21},\ P_{12} = x y^2 + Q_{12},\ P_{03} = y^3 + Q_{03}. \quad (3)$$

Die Q_{ik} sind Polynome höchstens zweiten Grades.

Nunmehr können wir folgenden Satz aussprechen:

Jedes in den Punkten $p_1 \ldots p_7$ verschwindende Polynom dritten Grades ist eine Linearkombination der P_{ik}.

Es entsteht somit die Aufgabe, Linearkombinationen der P_{ik} mit sieben gemeinsamen Nullstellen zu finden und zwar,, wie wir gleich beweisen werden, in der Anzahl 3.

Zuerst stellen wir eine Hilfsbetrachtung an. Wenn die sieben Punkte $p_1 \ldots p_7$ auf keinem Kegelschnitt liegen, so gibt es sicher sechs unter ihnen, für die dasselbe gilt. Wir legen durch den siebten Punkt eine Gerade, die durch keinen der sechs Punkte geht und wählen auf ihr drei Punkte p_8, p_9, p_{10}. Eine C_3 durch $p_1 \ldots p_{10}$ würde die Gerade in vier Punkten schneiden, zerfiele also in die Gerade und einen Kegelschnitt durch die sechs Punkte, was nicht möglich ist. Den sieben Punkten lassen sich also drei weitere (p_8, p_9, p_{10}) derartig hinzufügen, daß $p_1 \ldots p_{10}$ auf keiner C_3 liegen. Analog beweist man die Existenz von fünf weiteren Punkten $(p_{11} \ldots p_{15})$, so daß keine C_4 durch alle 15 Punkte geht.

Die Polynome dritten Grades, die in $p_1 \ldots p_7$ verschwinden, sind nun, wie man sofort sieht, durch ihre Werte in p_8, p_9, p_{10} eindeutig bestimmt. Demnach gibt es genau drei linear unabhängige Polynome dritten Grades, die in $p_1 \ldots p_7$ verschwinden.

Zur Aufsuchung von drei linear-unabhängigen Orthogonalpolynomen Π_1, Π_2, Π_3 mit den sieben gemeinsamen Nullstellen $p_1 \ldots p_7$ verhilft nun der folgende Satz:

---

[2] Im folgenden ist der Ausdruck „orthogonal" stets auf D als Integrationsgebiet zu beziehen.

Es gibt drei nicht identisch verschwindende Linearpolynome L_1, L_2, L_3, so daß identisch:

$$L_1 \Pi_1 + L_2 \Pi_2 + L_3 \Pi_3 = 0 \tag{4}$$

Die linke Seite ist nämlich als Polynom vierten Grades durch die Werte in $p_1 \dots p_{15}$ eindeutig bestimmt, zu ihrem identischen Verschwinden ist daher das Nullsein in $p_8 \dots p_{15}$ notwendig und ausreichend. Das gibt acht linear-homogene Gleichungen für die neun Koeffizienten der L_i, die sicher lösbar sind.

Durch Aufspaltung der L_i in die einzelnen Glieder läßt sich (4) so schreiben:

$$x K_1 + y K_2 = K_3 \tag{5}$$

wo die K_i ebenfalls Orthogonalpolynome dritten Grades sind, die aber nicht linear-unabhängig zu sein brauchen.

3. Setzt man K_1 und K_2 als Linearkombinationen der P_{ik} an und beachtet, daß sich in (5) die Glieder vierter Ordnung links aufheben müssen, so kommt man auf:

$$\begin{aligned} K_1 &= \alpha P_{21} + \beta P_{12} + \gamma P_{03} \\ K_2 &= -\alpha P_{30} - \beta P_{21} - \gamma P_{12} \end{aligned} \tag{6}$$

Daher sind K_1 und K_2 sicher linear-unabhängig, wenn sie nicht identisch Null sind. Dann wäre aber auch K_3 identisch Null und damit, wie leicht zu sehen, $L_1 L_2 L_3$ linear abhängig.

Die Koeffizienten α, β, γ sind nun so zu wählen, daß auch $x K_1 + y K_2$ ein Orthogonalpolynom ist. Da dieser Ausdruck schon von selbst zu jedem Linearpolynom orthogonal ist, braucht man nur seine Orthogonalität zu x^2, $x y$ und y^2 zu verlangen. Die entstehenden drei Gleichungen sind nicht unabhängig. Sie sagen aus, daß die drei zweireihigen Determinanten der Matrix:

$$\begin{Bmatrix} \overset{\alpha}{\iint\limits_D} (P_{21} P_{03} - P_{12}^2)\, dx\, dy & \overset{\beta}{\iint\limits_D} (P_{21} P_{12} - P_{30} P_{03})\, dx\, dy \\ & \overset{\gamma}{\iint\limits_D} (P_{30} P_{12} - P_{21}^2)\, dy \end{Bmatrix} \tag{7}$$

Null sind. Wir unterscheiden nun die folgenden beiden Fälle:

A. Die drei Integrale in (7) sind nicht alle Null, dann sind α, β, γ bis auf einen gemeinsamen Faktor eindeutig bestimmt.

B. Alle drei Integrale sind Null. Dann sind α, β, γ nach Belieben wählbar.

Der Fall B) tritt in keinem der durchgerechneten Fälle auf, es ist mir aber nicht gelungen, allgemein seine Unmöglichkeit nachzuweisen.

Bei der Berechnung der Integrale in (7) kann man die P_{ik} auch durch die quadratischen Polynome Q_{ik} ersetzen, denn es ist z. B.:

$$0 = \iint_D [x^3 . xy^2 - (x^2 y)^2]\, dx dy = \iint_D [(P_{30} - Q_{30})(P_{12} - Q_{12}) - (P_{21} - Q_{21})^2]\, dx\, dy,$$

$$\iint_D (P_{30} P_{12} - P_{21}^2)\, dx\, dy + \iint_D (Q_{30} Q_{12} - Q_{21}^2)\, dx\, dy = 0.$$

4. Nach Bestimmung von K_1 K_2 unterscheiden wir abermals zwei Fälle:

a) $K_3 = x\, K_1 + y\, K_2$ ist von K_1 und K_2 linear unabhängig. Dann ist (5) bereits eine Identität der Form (4).

b) K_3 ist Linearkombination von K_1 und K_2. Dann ist:

$$(x - a)\, K_1 + (y - b)\, K_2 = 0$$

und durch Parallelverschiebung des Koordinatensystems kann man stets den Fall

$$x\, K_1 + y\, K_2 = 0 \tag{8}$$

herstellen. (8) ist dann auch eine Identität der Form (4), wenn wir unter K_3 irgendeines der von K_1 und K_2 linear unabhängigen Orthogonalpolynome dritten Grades verstehen und $L_3 = 0$ setzen.

Im Fall b) gilt weiter folgendes: Es ist $K_1 = y\, Q$, $K_2 = -x\, Q$, wo Q quadratisch ist. Ferner verschwinden alle Orthogonalpolynome dritten Grades im Nullpunkt. Es gilt nämlich für irgend zwei quadratische Polynome Q_1 Q_2:

$$\iint_D (x\, Q_1 + y\, Q_2)\, Q\, dx\, dy = 0,$$

so daß Q zu jedem Polynom dritten Grades, das im Nullpunkt verschwindet, orthogonal ist. Sei nun K ein beliebiges kubisches Orthogonalpolynom. Dann ist nach dem eben Bewiesenen:

$$\iint_D [K(x\, y) - K(0, 0)]\, Q\, dx\, dy = 0,$$

also $K(0, 0) \iint Q\, dx\, dy = 0$. Wäre hier das Integral Null, so wäre Q zu *allen* Polynomen dritten Grades orthogonal, müßte daher identisch Null sein. Das ist ausgeschlossen, weil K_1 und K_2 linear unabhängig sind.

Wir denken uns nun K_3 linear-unabhängig von K_1 und K_2 gewählt. Da $K_3(0, 0) = 0$, so beginnt K_3 mit Gliedern erster Ordnung in x, y. Da, wie oben gezeigt, $Q(0, 0) \neq 0$, so sind in K_1 und K_2 die Glieder erster Ordnung vorhanden und lauten:

$$K_1 = Q(0, 0)\, y + \ldots, \quad K_2 = -Q(0, 0)\, x + -.$$

Da wir uns nur für die gemeinsamen Nullstellen von K_1, K_2, K_3 interessieren, können wir von K_3 eine solche Linearkombination von K_1 K_2 abziehen, daß die linearen Glieder verschwinden. Die durch $K_3 = 0$ gegebene Kurve hat dann im Nullpunkt einen singulären Punkt. Es gibt dann genau zwei linear-unabhängige derartige K_3, die, gleich Null gesetzt, ein Büschel von rationalen C_3 mit dem Nullpunkt als singulärem Punkt definieren.

5. Sind die Orthogonalpolynome K_1, K_2, K_3 auf die angegebene Art gefunden, so besteht also zwischen ihnen die Relation (5), bzw. (8). Wie aus dem Beweis erhellt, ist es im Falle A) die *einzige* Relation der Form (4), die zwischen den K_i besteht, abgesehen von der Hinzufügung eines konstanten Faktors.

Wir zeigen nun noch, daß im Fall A) die Polynome K_i teilerfremd sind. Zunächst läßt sich der Fall eines quadratischen Teilers Q_0 — auch im Fall B) — folgendermaßen ausschließen: sei $K_i = Q_0 L_i$; dann sind, wie die K_i, auch die Linearpolynome L_i linear unabhängig. Daher lassen sich drei Konstante so finden, daß:

$$c_1 L_1 + c_2 L_2 + c_3 L_3 = 1.$$

Daraus folgt:

$$c_1 K_1 + c_2 K_2 + c_3 K_3 = Q_0$$

und dies ergibt sogleich einen Widerspruch, da dann Q_0 zu sich selbst orthogonal wäre.

Um auch zu zeigen, daß kein linearer gemeinsamer Teiler der K_i vorhanden ist, müssen wir die Fälle a) und b) getrennt behandeln. Im Fall a) führt die Annahme eines gemeinsamen Linearfaktors auf den Ansatz:

$$K_1 = L\,[y\,(a\,x + b\,y) + L_1]$$
$$K_2 = L\,[-x\,(a\,x + b\,y) + L_2]$$
$$K_3 = L\,(x\,L_1 + y\,L_2),$$

wo L, L_1, L_2 Linearpolynome sind. Hieraus folgt:

$$L_2 K_1 - L_1 K_2 = (a\,x + b\,y)\, K_3.$$

Nach der Bemerkung zu Beginn dieser Nummer müßte $a = b = 0$ sein, so daß K_1 und K_2 keine Glieder dritter Ordnung enthielten, was unmöglich ist. Im Fall b) hätten wir:

$$K_1 = L\, L_1\, y, \quad K_2 = -L\, L_1\, x, \quad K_3 = L\, Q_1,$$

wo L, L_1 linear, Q_1 quadratisch ist. Da K_3 im Nullpunkt verschwindet, ist dort entweder L oder Q_1 Null. Im ersten Fall ist:

$$K_1 = (a\, x + b\, y)\, L_1\, y, \quad K_2 = -(a\, x + b\, y)\, L_1\, x,$$

also:

$$b\, K_1 - a\, K_2 = L_1\, (a\, x + b\, y)^2.$$

Da dies zu L_1 orthogonal wäre, müßte entweder $a\, x + b\, y$ oder L_1 identisch verschwinden, was unmöglich ist. Im zweiten Fall könnte man

$$Q = x\, M_1 + y\, M_2$$

(M_1, M_2 linear) setzen. Das gibt unter:

$$M_2\, K_1 - M_1\, K_2 = L\, L_1\, Q = L_1\, K_3.$$

Das wäre wieder eine Relation der Form (4) zwischen den K_i und hätte demnach zur Folge, daß L_1 identisch Null ist, das ist wieder ausgeschlossen.

6. Wir betrachten nun die gemeinsamen Nullstellen von K_1, K_2, K_3. Im Fall a) haben die beiden Kurven dritter Ordnung $K_1 = 0$ und $K_2 = 0$ genau zwei unendlich ferne Schnittpunkte, die sich aus $\alpha\, x^2 + \beta\, x\, y + \gamma\, y^2 = 0$ ergeben. Es bleiben also sieben eigentliche Schnittpunkte. Falls diese reell und getrennt sind, so haben wir in den K_i drei linear-unabhängige Orthogonalpolynome dritten Grades mit genau sieben gemeinsamen Nullstellen vor uns. Nach dem Gang des Beweises ist dieses Tripel von Orthogonalpolynomen — bis auf eine lineare Transformation — eindeutig bestimmt.

Im Fall b) erhalten wir zunächst den Nullpunkt als gemeinsame Nullstelle, außerdem die sechs Schnittpunkte der rationalen C_3 des Büschels mit dem Kegelschnitt K, also wiederum sieben Punkte, die aber jetzt von dem Büschelparameter abhängen. Wir erhalten also ein Kontinuum von Lösungen.

Die so bestimmten sieben Punkte liegen unter den gemachten Voraussetzungen nicht auf einem Kegelschnitt. Im Fall a) hätten dann nämlich K_1 und K_2 einen gemeinsamen Teiler, im Fall b) wäre $Q(0, 0) = 0$. Dann könnte man $Q(x\, y) = x\, L_1 + y\, L_2$ setzen, wo L_1 und L_2 lineare Polynome sind. Aus

$$K_1 = y\,(x\,L_1 + y\,L_2),\; K_2 = -\,x\,(x\,L_1 + y\,L_2)$$

würde dann aber folgen:

$$\iint_D (x\,L_1 + y\,L_2)^2\,dx\,dy = \iint_D (L_2\,K_1 - L_1\,K_2)\,dx\,dy = 0,$$

so daß K_1 und K_2 identisch Null wären.

7. Analog wie in Nr. 2 wählen wir jetzt zu den Punkten $p_1 \ldots p_7$ noch 14 weitere $p_8 \ldots p_{21}$, so daß ein Polynom fünften Grades durch seine Werte in $p_1 \ldots p_{22}$ eindeutig bestimmt ist. Wenn es in $p_1 \ldots p_7$ verschwindet, so bleiben in ihm noch 14 Konstante linear-homogen verfügbar. Sei P_5 ein solches Polynom. Durch den Ansatz:

$$P_5 = Q_1\,K_1 + Q_2\,K_2 + Q_3\,K_3 \tag{9}$$

mit quadratischen Q_i ergeben sich für deren 18 Koeffizienten 14 lineare Gleichungen. Um die Lösbarkeit dieses Systems zu diskutieren, betrachten wir das zugehörige homogene Gleichungssystem, das der Aufgabe entspricht, die Q_i so zu bestimmen, daß P_5 identisch verschwindet. Im Fall a) führt dies auf:

$$(Q_1 + x\,Q_3)\,K_1 + (Q_2 + y\,Q_3)\,K_2 = 0. \tag{9'}$$

Da K_1 und K_2 teilerfremd sind, folgt:

$$\begin{aligned} Q_1 + xQ_3 &= -\,CK_2 = Cx(\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2) + C(\alpha Q_{30} + \beta Q_{21} + \gamma Q_{12}) \\ Q_2 + yQ_3 &= \quad CK_1 = Cy(\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2) + C(\alpha Q_{12} + \beta Q_{12} + \gamma Q_{03}) \end{aligned}$$

und weiter:

$$\begin{aligned} Q_3 &= C\,(\alpha\,x^2 + \beta\,x\,y + \gamma\,y^2) + a\,x + b\,y + c \\ Q_1 &= C\,(\alpha\,Q_{30} + \beta\,Q_{12} + \gamma\,Q_{12}) - x\,(a\,x + b\,y + c) \\ Q_2 &= C\,(\alpha\,Q_{21} + \beta\,Q_{12} + \gamma\,Q_{03}) - y\,(a\,x + b\,y + c) \end{aligned}$$

Dies ist die allgemeinste Lösung von (9'), sie enthält vier willkürliche Konstante, der Rang des homogenen Systems ist also 14. Im Fall b) ergibt sich analog:

$$(Q_1\,y - Q_2\,x)\,Q + Q_3\,K_3 = 0 \tag{9''}$$

Da Q und K_3 teilerfremd, ist

$$\begin{aligned} Q_3 &= C\,Q \\ Q_1\,y - Q_2\,x + C\,K_3 &= 0. \end{aligned}$$

Weil $K_3\,(0, 0) = 0$, kann man

$$K_3 = y\,Q_1^{(0)} - x\,Q_2^{(0)}$$

setzen, wo $Q_1^{(0)}$ und $Q_2^{(0)}$ quadratisch sind. Dann folgt:

$$(Q_1 + C\,Q_1^{(0)})\,y - (Q_2 + C\,Q_2^{(0)})\,x = 0$$

und hieraus leicht:

$$Q_1 = -C\,Q_1^{(0)} + x\,(a\,x + b\,y + c)$$
$$Q_2 = -C\,Q_2^{(0)} + y\,(a\,x + b\,y + c).$$

Wie oben schließt man, daß das homogene System den Rang 14 hat. Infolgedessen ist das nicht-homogene System sicher lösbar.

Da ein beliebiges Polynom fünften Grades durch seine Werte in $p_1 \ldots p_{21}$ eindeutig bestimmt ist, ergibt sich leicht:

$$\iint_D P_5(x, y)\,dx\,dy = \sum_{k=1}^{21} \mu_k\, P_5(x_k\, y_k).$$

Ist nun P_5 in $p_1 \ldots p_7$ Null, so ist es in der Form (9) darstellbar, also ist das Doppelintegral Null. Hieraus folgt aber, daß $\mu_4 = \ldots = \mu_{21} = 0$, sodaß die Kubaturformel (1) mit $\nu = 7$ bewiesen ist.

II.

1. Als ersten Spezialfall behandeln wir ein Dreieck als Integrationsbereich. Da (1) gegenüber flächentreuen Affinitäten invariant ist, genügt der folgende Spezialfall:

$$D: \quad 0 \leqq x \leqq a,\ 0 \leqq y \leqq a - x.$$

Man berechnet unschwer[1]:

$$P_{30} = x^3 - \frac{9}{7}ax^2 + \frac{3}{7}a^2x - \frac{1}{35}a^3,$$
$$P_{21} = x^2y - \frac{1}{7}ax^2 - \frac{4}{7}axy + \frac{2}{21}a^2x + \frac{1}{21}a^2y - \frac{1}{105}a^3,$$
$$P_{12} = xy^2 - \frac{4}{7}axy - \frac{1}{7}ay^2 + \frac{1}{21}a^2x + \frac{2}{21}a^2y - \frac{1}{105}a^3,$$
$$P_{03} = y^3 - \frac{9}{7}ay^2 + \frac{3}{7}a^2y - \frac{1}{35}a^3$$

und erhält, indem der Fall a) vorliegt:

$$K_1 = x^2y + xy^2 + y^3 - \frac{1}{7}ax^2 - \frac{8}{7}axy - \frac{10}{7}ay^2 + \frac{1}{7}a^2x + \frac{4}{7}a^2y - \frac{1}{21}a^3$$
$$K_2 = -x^3 - x^2y - ay^2 + \frac{10}{7}ax^2 + \frac{8}{7}axy + \frac{1}{7}ay^2 - \frac{4}{7}a^2x - \frac{1}{7}a^2y + \frac{1}{21}a^3$$
$$K_3 = -\frac{a}{7}x^3 + \frac{2a}{7}x^2y - \frac{2a}{7}xy^2 + \frac{a}{7}y^3 + \frac{a^2}{7}x^2 - \frac{a^2}{7}y^2 - \frac{a^3}{21}x + \frac{a^3}{21}y$$

Die sieben gemeinsamen Nullstellen berechnet man am besten in Schwerpunktskoordinaten bezüglich des Dreieckes D, wobei man gleich eine affin-invariante Darstellung der Punkte $p_1 \ldots p_7$ erhält. Setzen wir:

[1] Zusatz bei der Korrektur: vgl. hier und im folgenden die Ergebnisse von *W. Gröbner*, welche im vorliegenden Band S. 38 ff. veröffentlicht sind.

$$\varrho\, x = x_1,\ \varrho\, y = x_2,\ \varrho\,(a - x - y) = x_3,$$

so liefern $K_1 = 0$ und $K_2 = 0$ die beiden Gleichungen:

$$x_1^3 - 2\,x_2^3 + x_3^3 + 9\,x_1^2\,x_2 - 9\,x_1\,x_2^2 - 9\,x_2^2\,x_3 + 9\,x_2\,x_3^2 = 0$$
$$-2\,x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 9\,x_1^2\,x_2 + 9\,x_1\,x_2^2 + 9\,x_3^2\,x_1 - 9\,x_3\,x_1^2 = 0.$$

Durch Addition folgt eine dritte Gleichung, die ebenso wie die zweite aus der ersten durch zyklische Vertauschung der Koordinaten entsteht. Subtraktion liefert:

$$(x_1 - x_2)\,(x^2{}_1 - 5\,x_1\,x_2 + x_2^2 + 3\,x_3^2 - 3\,x_3\,x_1 - 3\,x_3\,x_2) = 0$$

sowie zwei durch zyklische Vertauschung hervorgehende Gleichungen. Je zwei davon sind mit $K_1 = 0$, $K_2 = 0$ gleichwertig. Wir erhalten als die gemeinsamen Nullstellen:

	x_1	x_2	x_3
p_1	1	1	1
p_2	$\sqrt{5}+\sqrt{3}$	$\sqrt{5}+\sqrt{3}$	$\sqrt{5}-\sqrt{3}$
p_3	$\sqrt{5}-\sqrt{3}$	$\sqrt{5}-\sqrt{3}$	$\sqrt{5}+\sqrt{3}$
p_4	$\sqrt{5}-\sqrt{3}$	$\sqrt{5}+\sqrt{3}$	$\sqrt{5}+\sqrt{3}$
p_5	$\sqrt{5}+\sqrt{3}$	$\sqrt{5}-\sqrt{3}$	$\sqrt{5}-\sqrt{3}$
p_6	$\sqrt{5}+\sqrt{3}$	$\sqrt{5}-\sqrt{3}$	$\sqrt{5}+\sqrt{3}$
p_7	$\sqrt{5}-\sqrt{3}$	$\sqrt{5}+\sqrt{3}$	$\sqrt{5}-\sqrt{3}$

Wegen der Symmetrieverhältnisse wird

$$\mu_1 = A,\ \mu_2 = \mu_4 = \mu_6 = B,\ \mu_3 = \mu_5 = \mu_7 = C.$$

Durch Berechnung von I_{00}, I_{10}, I_{20} erhält man:

$$A = \frac{9}{80}\,a^2,\quad B = \frac{155 + \sqrt{15}}{2400}\,a^2,\quad C = \frac{155 - \sqrt{15}}{2400}\,a^2.$$

Kehrt man zu den alten Koordinaten zurück, so ergibt sich die folgende Tabelle:

Dreieck $0 \leqq x \leqq a,\ 0 \leqq y \leqq a - x$

x_n	$\frac{1}{3}$	$\frac{6+\sqrt{15}}{21}a$	$\frac{9-2\sqrt{15}}{21}a$	$\frac{6+\sqrt{15}}{21}a$	$\frac{6-\sqrt{15}}{21}a$	$\frac{9+2\sqrt{15}}{21}a$	$\frac{6-\sqrt{15}}{21}a$
y_n	$\frac{1}{3}$	$\frac{9-2\sqrt{15}}{21}a$	$\frac{6+\sqrt{15}}{21}a$	$\frac{6+\sqrt{15}}{21}a$	$\frac{9+2\sqrt{15}}{21}a$	$\frac{6-\sqrt{15}}{21}a$	$\frac{6-\sqrt{15}}{21}a$
μ_n	$\frac{9}{80}a^2$	$\frac{155+\sqrt{15}}{2400}a^2$			$\frac{155-\sqrt{15}}{2400}a^2$		

2. Nunmehr sei D ein zu beiden Koordinatenachsen symmetrischer Bereich, bzw. ein solcher, dem nach einer geeigneten affinen Transformation diese Eigenschaft zukommt. Hier sind alle $I_{\alpha\,\beta}$ Null, bei denen α oder β ungerade ist. Das ergibt:

$$P_{30} = x^3 - \frac{I_{40}}{I_{20}} x,\ P_{21} = x^2 y - \frac{I_{22}}{I_{02}} y,\ P_{12} = x y^2 - \frac{I_{22}}{I_{20}} x,\ P_{03} = y^3 - \frac{I_{04}}{I_{02}} y$$

Für die drei Integrale in (7) erhält man bis auf einen gemeinsamen, nicht verschwindenden Faktor die Werte:

$$I_{20}\, I_{04} - I_{02}\, I_{22},\quad 0,\quad I_{02}\, I_{40} - I_{20}\, I_{22}.$$

Würde der Fall B) eintreten, so müßten alle drei Werte Null sein. Hieraus würde folgen:

$$I_{40}\, I_{04} - I_{22}^2 = 0$$

und das stünde in Widerspruch zu dem Umstand, daß die quadratische Form:

$$I_{40}\, u^2 + 2\, I_{22}\, u\, v + I_{04}\, v^2 = \iint\limits_D (u\, x^2 + v\, y^2)^2\, d\, x\, d\, y$$

positiv definit ist.

Wegen

$$K_1 = y\,[(I_{20}\, I_{04} - I_{02}\, I_{22})\, x^2 + (I_{02}\, I_{40} - I_{20}\, I_{22})\, y^2 - (I_{40}\, I_{04} - I_{22}^2)]$$
$$K_2 = -\,x\,[(I_{20}\, I_{04} - I_{02}\, I_{22})\, x^2 + (I_{02}\, I_{40} - I_{20}\, I_{22})\, y^2 - (I_{40}\, I_{04} - I_{22}^2)]$$

liegt hier der Fall b) vor. Für K_3 erhalten wir das Büschel:

$$K_3 = \lambda\,(I_{22}\, x^3 - I_{40}\, x\, y^2) + \mu\,(I_{00}\, x^2\, y - I_{22}\, y^3).$$

Diese kubische Form zerfällt in drei *reelle* Linearfaktoren. Es ist nämlich:

$$K_3\,(0_1 - 1) = \mu\, I_{22},\ K_3\,(\sqrt{I_{40}}, -\sqrt{I_{22}}) = -\,\mu\,\sqrt{I_{22}}\,(I_{04}\, I_{40} - I_{12}^2),$$
$$K_3\,(\sqrt{I_{40}}, \sqrt{I_{22}}) = \mu\,\sqrt{I_{22}}\,(I_{04}\, I_{40} - I_{22}^2),\ K_0\,(0, 1) = -\,\mu\, I_{22}.$$

Ist $\mu \neq 0$, so erkennt man aus den Vorzeichen dieser Ausdrücke, daß K_3 auf drei verschiedenen Strahlen des Büschels der Geraden durch den Nullpunkt verschwinden muß. Für $\mu = 0$ erkennt man dasselbe direkt. Die sechs Schnittpunkte dieser Strahlen mit dem Kegelschnitt

$$Q = (I_{20}\, I_{04} - I_{02}\, I_{22})\, x^2 + (I_{02}\, I_{40} - I_{20}\, I_{22})\, y^2 - (I_{40}\, I_{04} - I_{22}^2) = 0$$

sind bei passender Wahl von $\lambda = \mu$ sicher reell. Ist der Kegelschnitt eine Ellipse, so ist nichts zu beweisen. Man erhält dann in den sechs

Schnittpunkten eine stetig von $\lambda : \mu$ abhängende Schar von Lösungen des Problems. Ist der Kegelschnitt keine Ellipse, so ist einer der Koeffizienten

$$\alpha = I_{20} I_{04} - I_{02} I_{22},\ \gamma = I_{02} I_{40} - I_{20} I_{22}$$

$\leqq 0$. Keinesfalls können beide $\leqq 0$ Null sein, denn es ist

$$\alpha I_{40} + \gamma I_{22} = I_{20} (I_{40} I_{04} - I_{22}^2) > 0$$

Ist $\alpha < 0$, so hat der Kegelschnitt mit

$$I_{22} x^3 - I_{40} x y^2 = 0 \quad (\lambda = 1, \mu = 0)$$

die reellen Schnittpunkte

$$x = \pm \sqrt{\frac{I_{40}}{I_{20}}},\ y = \pm \sqrt{\frac{I_{22}}{I_{20}}};\ x = 0,\ y = \pm \frac{\sqrt{I_{04} I_{40} - I_{22}^2}}{\sqrt{I_{20} I_{04} - I_{02} I_{22}}}$$

Entsprechendes gilt, wenn $\gamma > 0$. Natürlich geben auch die benachbarten Werte von $\lambda : \mu$ brauchbare Lösungen.

Es ist von Interesse, eine hinreichende Bedingung dafür zu kennen, daß α, bzw. γ positiv sind. Eine solche lautet:

Wenn der in $x \geqq 0,\ y \geqq 0$ gelegene Teil von D durch die Ungleichungen:

$$0 \leqq x \leqq a,\ 0 \leqq y \leqq \varphi(x)$$

mit einem in $[0, a]$ stetigen $\varphi(x)$ definiert ist und $\frac{\varphi(x)}{x}$ in $(0, a)$ monoton fällt, so ist $\gamma > 0$.

Dann ist nämlich:

$$I_{20} = 4 \int_0^a w x^2 \varphi(x)\, d x,\ I_{02} = \frac{4}{3} \int_0^a \varphi(x)^3\, d x,$$

$$I_{40} = 4 \int_0^a x^4 \varphi(x)\, d x,\ I_{22} = \int_0^a x^2 \varphi(x)^3\, d x,$$

$$\gamma = I_{02} I_{40} - I_{20} I_{22} = \frac{16}{3} \int_0^a \int_0^a [\varphi(x)^3 \xi^4 \varphi(\xi) - x^2 \xi^2 \varphi(x) \varphi(\xi)^3]\, d x\, d \xi$$

$$= \frac{16}{3} \int_0^a \int_0^a \varphi(x) \varphi(\xi) \xi^2 [\xi^2 \varphi(x)^2 - x^2 \varphi(\xi)^2]\, d x\, d \xi$$

$$= \frac{8}{3} \int_0^a \int_0^a \varphi(x) \varphi(\xi) (\xi^2 - x^2) \xi^2 x^2 [(\frac{\varphi(x)}{x})^2 - (\frac{\varphi(\xi)}{\xi})^2]\, d x\, d \xi > 0.$$

Insbesondere ist für jeden konvexen achsensymmetrischen Bereich $\alpha > 0$ und $\gamma > 0$.

Als Sonderfälle ergeben sich Kreis, bzw. Ellipse sowie Quadrat, bzw. Parallelogramm. Für den Kreis liegen die sieben Punkte im Mittelpunkt und in den Ecken eines konzentrischen regelmäßigen Sechsecks. Die Drehsymmetrie setzt hier das Auftreten des Kontinuums von Lösungen in Evidenz. Hier die Tabelle:

Kreis $x^2 + y^2 \leqq a^2$

x_k	0	$\sqrt{\frac{2}{3}}\,a$	$\frac{1}{\sqrt{6}}\,a$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}\,a$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}\,a$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}\,a$	$\frac{1}{\sqrt{6}}\,a$
y_k	0	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}\,a$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\,a$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}\,a$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}\,a$
μ_k	$\frac{a^2\pi}{4}$	$\frac{a^2\pi}{8}$					

Beim Quadrat ist der Kegelschnitt $Q = 0$ ebenfalls ein Kreis; die entsprechende Tabelle lautet für $\lambda = 0, \mu = 1$:

Quadrat $|x| \leqq a, |y| \leqq a$

x_k	0	$\sqrt{\frac{14}{15}}\,n$	$-\sqrt{\frac{14}{15}}\,a$	$\frac{1}{\sqrt{3}}\,a$	$\frac{1}{\sqrt{5}}\,a$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}\,a$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}\,a$
y_k	0	0	0	$\sqrt{\frac{3}{5}}\,a$	$-\sqrt{\frac{3}{5}}\,a$	$\sqrt{\frac{3}{5}}\,a$	$-\sqrt{\frac{3}{5}}\,a$
μ_k	$\frac{8}{7}\,a^2$	$\frac{20}{63}\,a^2$		$\frac{5}{9}\,a^2$			

Diese Lösung und die durch Vertauschung der Achsen sich ergebende sind durch das Lösungskontinuum verbunden.

III.

Um zu einer Fehlerschätzung zu gelangen, werde D als ein durch $0 \leqq r \leqq R\,(\varphi)$ in Polarkoordinaten definierter Sternbereich vorausgesetzt. $f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ werde mit $F(r, \varphi)$, die partiellen Ableitungen von F nach r mit $F', F'' \ldots$ bezeichnet. Ist f in D mit seinen Ableitungen bis zur sechsten Ordnung stetig, so ergibt die Taylorsche Formel mit dem Restglied in der Integralform:

$$f(x, y) = P_5(x, y) + \frac{1}{51}\int_0^r (r-\varrho)^4 F^{\mathrm{VI}}(\varrho, \varphi)\, d\varrho, \qquad (1)$$

wo P_5 ein Polynom fünften Grades ist. Setzen wir nun für jede stetige Funktion ω

$$\iint_D \omega(x, y)\, dx\, dy - \sum_{k=1}^{7} \mu_k\, \omega(x_k, y_k) = \Phi[\omega], \tag{2}$$

so folgt durch Einsetzen von (1) für den Fehler Φ der Kubaturformel:

$$\Phi[f] = \frac{1}{120} \iint_D \left\{ \int_0^r (r-\varrho)^5 F^{\mathrm{VI}}(\varrho, \varphi)\, d\varrho \right\} dx\, dy -$$

$$- \sum_{k=1}^{7} \frac{\mu_k}{120} \int_0^{r_k} (r_k - \varrho)^5\, F^{\mathrm{VI}}(\varrho, \varphi)\, d\varrho$$

$$= \frac{1}{120} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R(\varphi)} r\, dr \int_0^r (r-\varrho)^5 F^{\mathrm{VI}}(\varrho, \varphi)\, d\varrho -$$

$$- \sum_{k=1}^{7} \frac{\mu_k}{120} \int_0^{r_k} (r_k - \varrho)^5\, F^{\mathrm{VI}}(\varrho, \varphi_k)\, d\varrho$$

$$= \frac{1}{120} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R(\varphi)} F^{\mathrm{VI}}(\varrho, \varphi)\, \frac{(R-\varrho)^6 (6R+\varrho)}{42}\, d\varrho -$$

$$- \sum_{k=1}^{7} \frac{\mu_k}{120} \int_0^{r_k} (r_k - \varrho)^5 F^{\mathrm{VI}}(\varrho, \varphi_k)\, d\varrho.$$

Um hieraus eine Abschätzung des Fehlers zu erhalten, die affin invarianten Charakter trägt, was für die Anwendung von Vorteil ist bezeichnen wir mit M_6 eine obere Schranke von:

$$|F^{\mathrm{VI}}(\varrho, \varphi)|, R(\varphi)^6$$

Die für $\Phi[f]$ erhaltene Formel liefert dann nach einer einfachen Rechnung:

$$|\Phi[f]| \leqq \frac{M_6}{2880} \left[F_D + 4 \sum_{1}^{7} |\mu_k| \left(\frac{r_k}{R(\varphi_k)}\right)^6\right],$$

wo F_D den Flächeninhalt von D bedeutet. So erhält man z. B. für D als Ellipse die Fehlerschätzung:

$$|\Phi[f]| \leqq M_C F_D \cdot \frac{17}{25920} < 0{\cdot}000656\ M_6 F_D.$$

Für das Parallelogramm ist:

$$|\Phi[f]| \leqq 0{\cdot}000694\ .\ M_6 F_D$$

Für das Dreieck (mit dem Schwerpunkt als Nullpunkt):

$$|\Phi[f]| \leqq\ .\ 0{\cdot}000576\ M_6 F_D.$$

Über Flächen mit isotropem mittleren Krümmungsvektor.[1]

Von
M. Pinl, Köln am Rhein.

(Eingelangt am 26. Januar 1948.)

Im folgenden bezeichnen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kartesische Punktkoordinaten eines komplexen n-dimensionalen Raumes R_n und kleine gotische Buchstaben $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{h}$ Vektoren in R_n. Zwei komplexe Parameter u_1, u_2 heißen isotrope Parameter der Fläche $\mathfrak{x}(u_1, u_2)$, wenn die Komponenten $g_{\alpha\beta}(u_1, u_2)$, $\alpha, \beta = 1, 2$, des metrischen Fundamentaltensors der Fläche in ihnen die Form

$$g_{11} = g_{22} = 0,\ g_{12} = g_{21} \neq 0,\ \left(g_{\alpha\beta} = \mathfrak{x}_\alpha \mathfrak{x}_\beta,\ \mathfrak{x}_\alpha = \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u_\alpha},\ \ldots,\ \alpha, \beta = 1, 2\right)$$

annehmen. In isotropen Flächenparametern wird also stets $|g_{\alpha\beta}| \neq 0$ vorausgesetzt, wodurch die halbisotropen[2] Flächen mit $|g_{\alpha\beta}| = 0$ und die vollisotropen[3] Flächen mit $g_{\alpha\beta} = 0$ ausgeschlossen werden. Diese Beschränkung ist jedoch von vornherein notwendig, wenn man den mittleren Krümmungsvektor $\mathfrak{h}$ einer Fläche in den Kreis der Betrachtungen ziehen will, der nur für $|g_{\alpha\beta}| \neq 0$ definiert ist.

1. Der mittlere Krümmungsvektor.

In isotropen Parametern erhalten wir für die zu den kovarianten Fundamentalkomponenten $g_{\alpha\beta}$ gehörigen kontravarianten Komponenten $g^{\alpha\beta}$ und Christoffelklammern $\left\{ {\mu \atop \alpha\beta} \right\}$[4]

---

[1] *W. Wirtinger* zum Gedächtnis. — Einen Teil der Ergebnisse dieser Arbeit habe ich auf der deutschen Mathematiker-Tagung in Tübingen im September 1946 vorgetragen, vgl. Bericht über die Mathematiker-Tagung in Tübingen, S. 121-122.

[2] Vgl. z. B. *E. Bompiani*, Le superficie emisotrope nello spazio euclideo a. quattro dimensioni, R. Accademia d'Italia, Memorie della Classe di Scienze fisiche, etc. vol. XII, 1940, n. 1. p. 1—23.

[3] Vgl. z. B. *J. Lense*, Über vollisotrope Flächen, Monatshefte f. Math. u. Phys. **43** (1936), 177—186; Math. Ann. 116/3 (1939), S. 297—309.

[4] Vgl. z. B. *V. Hlavaty—M. Pinl*, Differentialgeometrie, Kap. II, S. 183ff., P. Noordhoff, Groningen 1939.

$$g^{11} = g^{22} = 0, \qquad g^{12} = \frac{1}{g_{12}}, \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 12 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix} \right\} = 0$$

und mit ihrer Hilfe für den Krümmungsaffinor $\mathfrak{h}_{\alpha\beta}$ und den mittleren Krümmungsvektor $\mathfrak{h}$ der Fläche $\mathfrak{x}$ die Ausdrücke[5]

$$\mathfrak{h}_{\alpha\beta} = \mathfrak{x}_{\alpha\beta} - \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} \mathfrak{x}_\mu, \mathfrak{h} = g^{\alpha\beta} \mathfrak{h}_{\alpha\beta} = 2 g^{12} \mathfrak{x}_{12}, (\mathfrak{x}_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial u_\alpha \partial u_\beta}, \alpha, \beta, \mu = 1, 2). \quad (1)$$

Nach (1) ist $\mathfrak{h}$ in isotropen Parametern isotrop, wenn $\mathfrak{x}_{12}$ isotrop ist und umgekehrt. Somit gründet sich die Theorie der Flächen mit isotropem mittleren Krümmungsvektor $\mathfrak{h}^2 = 0$ $(\mathfrak{h} \neq 0)$ in isotropen Flächenparametern u_1, u_2 auf die Identitäten[6]

$$\boxed{\mathfrak{x}_1^2 \equiv \mathfrak{x}_2^2 \equiv \mathfrak{x}_{12}^2 \equiv 0 \{u_1, u_2\}.} \quad (2)$$

Demgegenüber stützt sich die Theorie der Minimalflächen in solchen Parametern auf die Identitäten

$$\boxed{\mathfrak{x}_1^2 \equiv \mathfrak{x}_2^2 \equiv 0, \mathfrak{x}_{12} \equiv 0 \{u_1, u_2\}.} \quad (3)$$

Aus (1) folgt durch skalare Multiplikation mit $\mathfrak{x}_\lambda$

$$\mathfrak{h}_{\alpha\beta} \mathfrak{x}_\lambda = \mathfrak{x}_\lambda \mathfrak{x}_{\alpha\beta} - \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} g_{\mu\lambda} = [\lambda, \alpha\beta] - [\lambda, \alpha\beta] = 0, \mathfrak{h} \mathfrak{x}_\lambda = g^{\alpha\beta} \mathfrak{h}_{\alpha\beta} \mathfrak{x}_\lambda = 0.$$

Der mittlere Krümmungsvektor $\mathfrak{h}$ liegt daher stets im $(n\text{-}2)$-dimensionalen Normalraum der Fläche. Für $n = 3$ ist dieser Normalraum eindimensional und das Determinantenquadrat $(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{12})^2$ verschwindet, wenn die Identitäten (2) bestehen. Wegen der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ besteht in diesem Falle die lineare Beziehung

$$\mathfrak{x}_{12} = \alpha_1 \mathfrak{x}_1 + \alpha_2 \mathfrak{x}_2$$

Durch skalare Multiplikation mit $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ folgt, da $\mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_{12} = \mathfrak{x}_2 \mathfrak{x}_{12} = 0$ und $\mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2 \neq 0$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \text{ d. h. } \mathfrak{x}_{12} = 0.$$

Im R_3 ist demnach das System (2) mit (3) aequivalent. Das können wir

---

[5] Vgl. z. B. *Schouten-Struik*, Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie, Bd. II, S. 183ff., P. Noordhoff, Groningen 1939; über doppelt vorkommende Indizes ist zu summieren, alle Funktionen werden analytisch vorausgesetzt.

[6] Identitäten werden bisweilen durch drei Gleichheitsstriche hervorgehoben; in $\{\ldots\}$ stehen die Veränderlichen und Parameter, in welchen die betreffende Identität gilt.

auch so ausdrücken: *im euklidischen dreidimensionalen Raum gibt es keine Flächen mit isotropem mittleren Krümmungsvektor.*

2. n = 4.

Bereits im euklidischen vierdimensionalen Raum sind die Systeme (2) und (3) nicht mehr aequivalent. Aus (2) folgt nicht mehr $\mathfrak{x}_{12} = 0$ und die Integration der Systeme (2) und (3) führt zu völlig verschiedenen Flächenklassen. Die Integralflächen des Systems (2) sind im allgemeinen keine Schiebflächen isotroper Kurven und die Flächen des R_4 mit isotropem mittleren Krümmungsvektor daher keine Minimalflächen. Da $\mathfrak{x}_{12}$ nach (1) mit $\mathfrak{h}$ kollinear ist, sind die Vektoren $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{12}$ im allgemeinen linear unabhängig und bilden den isotropen Trivektor[7]

$$\mathfrak{e} = [\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{12}] \neq 0, \; \mathfrak{e}^2 = \begin{vmatrix} 0 & g_{12} & 0 \\ g_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Nach (4) verschwindet das Determinantenquadrat $(\mathfrak{e}, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{12})^2$. Daher gilt

$$\lambda\, \mathfrak{e} + \lambda_1\, \mathfrak{x}_1 + \lambda_2\, \mathfrak{x}_2 + \lambda_{12}\, \mathfrak{x}_{12} = 0. \tag{5}$$

Aus (5) entsteht durch skalare Multiplikation mit $\mathfrak{x}_2$ und $\mathfrak{x}_1$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \; \lambda\, \mathfrak{e} + \lambda_{12}\, \mathfrak{x}_{12} = 0.$$

Somit sind die Vektoren $\mathfrak{e}, \mathfrak{x}_{12}, \mathfrak{h}$ proportional und das Feld der Stellungsvektoren $\mathfrak{e}$ (n_1, n_2) bestimmt längs jeder Fläche des R_4 mit isotropem mittleren Krümmungsvektor eine zweiparametrige Schar dreidimensionaler isotroper Räume.

Die ersten und zweiten Ableitungen des Ortsvektors $\mathfrak{x}$ bilden den (ersten) Schmiegraum der Fläche $\mathfrak{x}$. Dieser ist nach unsern Voraussetzungen mindestens drei- und höchstens vierdimensional. Längs Torsen ist der

---

[7] D. h. der Vektor, dessen Komponenten in diesem Falle durch die Determinanten dritter Ordnung der Matrix

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1}, & \frac{\partial x_2}{\partial u_1}, & \frac{\partial x_3}{\partial u_1}, & \frac{\partial x_4}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_2}, & \frac{\partial x_2}{\partial u_2}, & \frac{\partial x_3}{\partial u_2}, & \frac{\partial x_4}{\partial u_2} \\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial u_1 \partial u_2}, & \frac{\partial^2 x_2}{\partial u_1 \partial u_2}, & \frac{\partial^2 x_3}{\partial u_1 \partial u_2}, & \frac{\partial^2 x_4}{\partial u_1 \partial u_2} \end{matrix} \right\|$$

gegeben sind.

Schmiegraum notwendig dreidimensional[8]. Da wir die Vektoren $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{12}$ linear unabhängig voraussetzen, haben wir nur das Verhalten der Determinanten $(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{12}, \mathfrak{x}_{11})$ und $(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{12}, \mathfrak{x}_{22})$ zu prüfen, um den Rang der Matrix

$$\| \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{12}, \mathfrak{x}_{11}, \mathfrak{x}_{22} \| \tag{6}$$

zu bestimmen. Sind $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ die ersten Ableitungen des Trivektors $\mathfrak{e}$, so bestehen für die Matrix

$$\| \mathfrak{e}, \mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2 \| \tag{7}$$

die Rangmöglichkeiten $r = 1, 2, 3$. Dann gilt: *die Matrix* (6) *ist dann und nur dann vom Rang* 3, *wenn die Matrix* (7) *vom Rang* $r = 1$ *ist und sie ist dann und nur dann vom Rang* 4, *wenn der Rang der Matrix* (7) $r = 2$ *oder* 3 *beträgt.*

Für $r = 1$ sind die Vektoren $\mathfrak{e}, \mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2$ proportional. Dann gilt mit Rücksicht auf (4)

$$\mathfrak{e}_1 = \mu_1 \mathfrak{e} = [\mathfrak{x}_{11}, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{12}] + [\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{121}] = \mu_1 [\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{12}],$$
$$\mathfrak{e}_2 = \mu_2 \mathfrak{e} = [\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_{22}, \mathfrak{x}_{12}] + [\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{122}] = \mu_2 [\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{12}].$$

Durch skalare Multiplikation mit $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ entsteht:

$$(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{12}, \mathfrak{x}_{11}) = \mathfrak{e}\mathfrak{x}_{11} = -\mathfrak{e}_1\mathfrak{x}_1 = 0, \; (\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{12}, \mathfrak{x}_{22}) = \mathfrak{e}\mathfrak{x}_{22} = -\mathfrak{e}_2\mathfrak{x}_2 = 0. \tag{8}$$

Umgekehrt sind $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{12}$ die einzigen linear unabhängigen Vektoren, welche aus $\mathfrak{x}$ durch Differentiation hervorgehen, wenn (8) besteht. Daher gilt notwendig

$$\mathfrak{e}_1 = \mu_1 \mathfrak{x}_1 + \mu_2 \mathfrak{x}_2 + \mu_{12} \mathfrak{x}_{12}, \; \mathfrak{e}_2 = \nu_1 \mathfrak{x}_1 + \nu_2 \mathfrak{x}_2 + \nu_{12} \mathfrak{x}_{12}. \tag{9}$$

Durch skalare Multiplikation von (9) mit $\mathfrak{x}_1$, bzw. $\mathfrak{x}_2$ entsteht aber wegen (8) und $g_{12} \neq 0$, $\mathfrak{e}_1 \mathfrak{x}_2 = \mathfrak{e}_2 \mathfrak{x}_1 = -\mathfrak{e}\, \mathfrak{x}_{12} = 0$

$$\mu_1 = \mu_2 = \nu_1 = \nu_2 = 0,$$

d. h. $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{x}_{12}$ und damit $\mathfrak{e}, \mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2$ werden proportional.

Für $r = 2$ sind die Vektoren $\mathfrak{e}, \mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2$ komplanar

$$\beta \mathfrak{e} + \beta_1 \mathfrak{e}_1 + \beta_2 \mathfrak{e}_2 = 0.$$

Durch skalare Multiplikation mit $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ folgt

$$\beta_1 \mathfrak{e}_1 \mathfrak{x}_1 = 0, \; \beta_2 \mathfrak{e}_2 \mathfrak{x}_2 = 0.$$

Da $\beta \mathfrak{e} \neq 0$ ist $\beta_1 = \beta_2 = 0$ unmöglich. Daher verschwindet mindestens eines der Skalarprodukte $\mathfrak{e}_1 \mathfrak{x}_1$, bzw. $\mathfrak{e}_2 \mathfrak{x}_2$. Da andererseits für $\mathfrak{e}_1 \mathfrak{x}_1 =$

---

[8] Dies zeigt am einfachsten die Darstellung $\mathfrak{x}(u, v) = \mathfrak{y}(u) + v\mathfrak{y}(u)$ mit $\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{y}' + v\mathfrak{y}''$, $\mathfrak{x}_2 = \mathfrak{y}'$, $\mathfrak{x}_{11} = \mathfrak{y}'' + v\mathfrak{y}'''$, $\mathfrak{x}_{12} = \mathfrak{y}''$, $\mathfrak{x}_{22} = 0$, wodurch sich höchstens drei lineare unabhängige Vektoren $\mathfrak{y}'$, $\mathfrak{y}''$, $\mathfrak{y}'''$ ergeben.

$\mathfrak{e}_2\,\mathfrak{x}_2 = 0$ nach (8) der frühere Fall $r = 1$ vorliegt, verschwindet höchstens eines der Skalarprodukte und daher eine und nur eine der beiden Determinanten $(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{12}, \mathfrak{x}_{11})$ und $(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{12}, \mathfrak{x}_{22})$ und einer und nur einer der Koeffizienten β_1 und β_2. Der Stellungsvektor $\mathfrak{e}$ ist somit entweder zu $\mathfrak{e}_1$ oder zu $\mathfrak{e}_2$ proportional. Gilt umgekehrt $(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{12}, \mathfrak{x}_{11}) = 0$ und $(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{12}, \mathfrak{x}_{22}) \neq 0$, so betrachten wir zunächst die Relationen

$$\mathfrak{e}\,\mathfrak{e}_1 = \mathfrak{e}\,\mathfrak{e}_2 = 0,\ (\mathfrak{e}, \mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{x}_1)^2 = (\mathfrak{e}, \mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{x}_2)^2 = 0,$$

welche auf die linearen Beziehungen

$$\varrho\,\mathfrak{e} + \varrho_1\,\mathfrak{e}_1 + \varrho_2\,\mathfrak{e}_2 + \sigma_1\,\mathfrak{x}_1 = 0,\ \tau\,\mathfrak{e} + \tau_1\,\mathfrak{e}_1 + \tau_2\,\mathfrak{e}_2 + \sigma_2\,\mathfrak{x}_2 = 0 \qquad (10)$$

führen. Skalare Multiplikation von (10) mit $\mathfrak{x}_1$ bzw. $\mathfrak{x}_2$ ergibt

$$\sigma_2 = 0,\ \varrho_2\,\mathfrak{e}_2\,\mathfrak{x}_2 + \sigma_1\,g_{12} = 0,\ \tau_2\,\mathfrak{e}_2\,\mathfrak{x}_2 = 0,\ \text{d. h. } \tau_2 = 0$$

dagegen, wenn $(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{12}, \mathfrak{x}_{11}) \neq 0$ und $(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{12}, \mathfrak{x}_{22}) = 0$ vorausgesetzt wird,

$$\varrho_1\,\mathfrak{e}_1\,\mathfrak{x}_1 = 0,\ \tau_1\,\mathfrak{e}_1\,\mathfrak{x}_1 + \sigma_2\,g_{12} = 0,\ \sigma_1 = 0,\ \text{d. h. } \varrho_1 = 0.$$

Im ersten Falle entsteht $\tau\,\mathfrak{e} + \tau_1\,\mathfrak{e}_1 = 0$, im zweiten Falle die Beziehung $\varrho\,\mathfrak{e} + \varrho_2\,\mathfrak{e}_2 = 0$, in beiden Fällen ist $r = 2$.

Für $r = 3$ sind die Vektoren $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$ linear unabhängig und beide Determinanten $(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{12}, \mathfrak{x}_{\alpha\alpha}) \neq 0$. In diesem Falle folgt aus (10) durch skalare Multiplikation mit $\mathfrak{x}_1$ bzw. $\mathfrak{x}_2$:

$$\varrho_1 = \tau_2 = 0,\ \varrho\,\mathfrak{e} + \varrho_2\,\mathfrak{e}_2 + \sigma_1\,\mathfrak{x}_1 = 0,\ \tau\,\mathfrak{e} + \tau_1\,\mathfrak{e}_1 + \sigma_2\,\mathfrak{x}_2 = 0$$

und daher durch skalare Multiplikation mit $\mathfrak{e}_2$ bzw. $\mathfrak{e}_1$

$$\varrho_2\,\mathfrak{e}_2^2 = \tau_1\,\mathfrak{e}_1^2 = 0.$$

Da $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{x}_1$ linear unabhängig sind, folgt $\mathfrak{e}_2^2 = 0$ und da $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{x}_1$ linear unabhängig sind, folgt $\mathfrak{e}_1^2 = 0$. Den Rangmöglichkeiten der Matrix (7) entsprechen die folgenden Stellungsvektoren

$$r = 1,\ \mathfrak{e} = \varphi(u_1, u_2)\,\mathfrak{a};\ r = 2,\ \mathfrak{e} = \psi(u_1)\,\mathfrak{b}(u_2) \text{ bzw. } \mathfrak{e} = \psi(u_2)\,\mathfrak{c}(u_1);$$
$$r = 3,\ \mathfrak{e} = \mathfrak{c}(u_1, u_2)$$

mit $\mathfrak{a} = \text{const}$, $\mathfrak{a}^2 = 0$, $\mathfrak{b}^2 \equiv 0 \left\{ u_2 \right\}$, $\mathfrak{c}^2 \equiv 0 \left\{ u_1 \right\}$. Im Falle $r = 1$ ist allen Flächenpunkten derselbe isotrope R_3 zugeordnet, in welchem die Fläche enthalten ist. Die Theorie dieser Flächen ist von *K. Strubecker* in zahlreichen Abhandlungen[9] untersucht worden. Im Falle $r = 2$ wird jedem Punkt einer und derselben Parameterkurve $u_2 = \text{const}$ derselbe isotrope

---

[9] Vgl. K. Strubecker, Journ. f. reine u. angewandte Math. **178** (1938), S. 135—173; Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften in Wien, Mathem.-naturwiss. Klasse, Abt. IIa, **150** (1941), S. 1—53; Math. Zeitschrift **47** (1942), S. 743—777; **48** (1942), S. 369—427.

[10] Z. B. für $u_1 = u_2 = 0$.

R_3 zugeordnet, wenn e durch $\psi(u_1)\,\mathfrak{b}(u_2)$ gegeben ist, bzw. jedem Punkte einer und derselben Parameterkurve $n_1 = \text{const}$, derselbe isotrope R_3, wenn e durch $\psi(u_2)\,\mathfrak{c}(u_1)$ gegeben ist. Diese Flächen sind jedoch keine Torsen, da ihr Schmiegraum vierdimensional ist. Der allgemeine Fall liegt für $r = 3$ vor. Zu seiner Behandlung geben wir im folgenden eine dualistische Darstellung der Flächen dieser Klasse an, die man als eine integrallose Lösung der Monge'schen Differentialgleichung $\mathfrak{h}^2 = 0$ in zwei abhängigen und zwei unabhängigen Veränderlichen auffassen kann.

3. n = 4, integrallose Darstellung.

Wir setzen

$$\mathfrak{m}(\bar{u}_1, \bar{u}_2) = \{1, a(\bar{u}_1, \bar{u}_2), b(\bar{u}_1, \bar{u}_2), i\sqrt{1 + a^2 + b^2}\}, \quad \mathfrak{m}^2 \equiv 0\{\bar{u}_1, \bar{u}_2\},$$

indem wir unter a und b analytische Funktionen der komplexen Parameter $\bar{u}_1, \bar{u}_2$ verstehen und transformieren auf neue Parameter u_1, u_2 gemäß:

$$u_1 = \frac{i\,(b + \sqrt{1 + a^2 + b^2})}{i + a}, \quad u_2 = \frac{i\,(b + \sqrt{1 + a^2 + b^2})}{i - a}. \tag{11}$$

Umgekehrt folgt aus (11)

$$a = \frac{i\,(u_2 - u_1)}{u_1 + u_2}, \quad b = \frac{u_1 u_2 - 1}{u_1 + u_2}, \quad i\sqrt{1 + a^2 + b^2} = \frac{i\,(u_1 u_2 + 1)}{u_1 + u_2}, \tag{12}$$

wenn nur die analytischen Funktionen $a(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ und $b(\bar{u}_1, u_2)$ so gewählt werden, daß die Funktionaldeterminante $\dfrac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(\bar{u}_1, \bar{u}_2)}$ nicht identisch verschwindet. Aus (12) gewinnen wir die isotropen Vektoren

$$\mathfrak{m}(u_1, u_2) = \left\{1, \frac{i\,(u_2 - u_1)}{u_1 + u_2}, \frac{u_1 u_2 - 1}{u_1 + u_2}, \frac{i\,(u_1 u_2 + 1)}{u_1 + u_2}\right\} \mathfrak{e} =$$

$$= \{u_1 + u_2, i\,(u_2 - u_1), u_1 u_2 - 1, i\,(u_2 u_1 + 1)\} \tag{13}$$

mit den Ableitungen und Skalarprodukten

$$\begin{gathered} \mathfrak{e}_1 = \{1, -i, u_2, i u_2\}, \quad \mathfrak{e}_2 = \{1, +i, u_1, i u_1\}, \quad \mathfrak{e}_{12} = \{0, 0, 1, i\}, \\ \mathfrak{e}_1^2 \equiv \mathfrak{e}_2^2 \equiv 0, \quad \mathfrak{e}_1 \mathfrak{e}_2 \equiv 2, \quad \mathfrak{c}\,\mathfrak{e}_{12} \equiv -2, \quad \mathfrak{e}_{12}^2 \equiv 0\{u_1, u_2\}. \end{gathered} \tag{14}$$

Für das Determinantenquadrat $(\mathfrak{e}, \mathfrak{e}_1, \mathfrak{c}_2, \mathfrak{e}_{12})^2$ ergibt sich nach (13) und (14) der Wert 16, für die Determinante selbst der Wert $+4^{10}$.

Daher sind die Vektoren $\mathfrak{e}, \mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_{12}$ linear unabhängig und die Matrix $\| \mathfrak{e}, \mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2 \|$ ist vom Rang 3.

Nunmehr gilt: *die allgemeinen Flächen des R_4 mit isotropem mittleren Krümmungsvektor sind die Rückkehrflächen (Gratflächen) der zweiparametrigen isotropen R_3-Schar*

$$(u_1 + u_2)\, x_1 + i\,(u_2 - u_1)\, x_2 + (u_1 u_2 - 1)\, x_3 + i\,(u_1 u_2 + 1)\, x_4 + \\ + f(u_1, u_2) = 0;$$

sie hängen von einer willkürlichen analytischen Funktion zweier komplexer Parameter ab, deren vierte gemischte Ableitung f_{1212} nicht identisch verschwindet.

Zum Nachweis bilden wir das lineare System:

$$\mathfrak{e}\,\mathfrak{x} + f = 0, \mathfrak{e}_1\,\mathfrak{x} + f_1 = 0, \mathfrak{e}_2\,\mathfrak{x} + f_2 = 0, \mathfrak{e}_{12}\,\mathfrak{x} + f_{12} = 0. \tag{15}$$

Während wir bisher u_1, u_2 stets als isotrope Parameter vorausgesetzt hatten, müssen wir jetzt umgekehrt aus $\mathfrak{e}^2 = 0$ und (14) den isotropen Charakter der Parameter u_1, u_2 auf den Lösungsflächen $\mathfrak{x}$ des Systems (15) beweisen. Zunächst genügt jede Lösung $\mathfrak{x}$ des Systems (15) den Bedingungen

$$\mathfrak{e}\,\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{e}\,\mathfrak{x}_2 = \mathfrak{e}_1\,\mathfrak{x}_2 = \mathfrak{e}_2\,\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{e}\,\mathfrak{x}_{12} = 0. \tag{16}$$

Daher sind die Vektoren $\mathfrak{e}$ und $[\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{12}]$ proportional und beide isotrop. Dann gilt nach (1)

$$[\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{12}]^2 = [\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{h}_{12} + \left\{ {\mu \atop 12} \right\} \mathfrak{x}_\mu]^2 = [\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{h}_{12}]^2 = |g_{\alpha\beta}|\, \mathfrak{h}_{12}^2 = 0.$$

Das bedeutet: für jede Lösung $\mathfrak{x}$ ist $\mathfrak{h}_{12}$ isotrop. Jetzt betrachten wir die linearen Beziehungen (10), deren Bestehen allein aus $\mathfrak{e}^2 = 0$ und $\mathfrak{e}\,\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{e}\,\mathfrak{x}_2 = 0$ hervorgeht. Multiplizieren wir (10) skalar mit $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ und benutzen (14) und (16), so ergibt sich

$$2\tau_2 + \sigma_2\,\mathfrak{x}_2\,\mathfrak{e}_1 = 2\tau_2 = 0, \; 2\varrho_1 + \sigma_1\,\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{e}_2 = 2\varrho_1 = 0$$

und demnach an Stelle von (10)

$$\varrho\,\mathfrak{e} + \varrho_2\,\mathfrak{e}_2 + \sigma_1\,\mathfrak{x}_1 = 0, \; \tau\,\mathfrak{e} + \tau_1\,\mathfrak{e}_1 + \sigma_2\,\mathfrak{x}_2 = 0. \tag{17}$$

Multiplizieren wir (17) skalar mit $\mathfrak{x}_1$ bzw. $\mathfrak{x}_2$ und benutzen (16), so ergibt sich

$$\sigma_1\,\mathfrak{x}_1^2 = \sigma_2\,\mathfrak{x}_2^2 = 0,$$

also wegen der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $\mathfrak{e}, \mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2$ das Verschwinden von $\mathfrak{x}_1^2$ und $\mathfrak{x}_2^2$. Die Parameter n_1, n_2 der zweiparametrigen R_4-Schar (15) sind daher auf $\mathfrak{x}$ isotrope Flächenparameter. Daher gilt nach (1) auf jeder Lösungsfläche $\mathfrak{x}$ des Systems (15)

$$\left\{{1 \atop 12}\right\} = \left\{{2 \atop 12}\right\} = 0,\ \mathfrak{h}_{12} = \mathfrak{x}_{12},\ \mathfrak{h} = 2\, g^{12}\, \mathfrak{x}_{12}$$

und mit $\mathfrak{h}_{12}$ ist also zugleich $\mathfrak{x}_{12}$ und $\mathfrak{h}$ isotrop. Die Lösungsflächen $\mathfrak{x}$ sind also Flächen mit isotropem mittleren Krümmungsvektor.
Um zu einer expliziten Darstellung zu gelangen, setzen wir in (15) nach (13) und (14) ein und erhalten das lineare System

$$\begin{aligned}
(u_1+u_2)x_1 + i(u_2-u_1)x_2 + (u_1u_2-1)x_3 + i(u_1u_2+1)x_4 &= -f(u_1,u_2),\\
x_1 - ix_2 + u_2x_3 + iu_2x_4 &= -f_1(u_1,u_2),\\
x_1 + ix_2 + u_1x_3 + iu_1x_4 &= -f_2(u_1,u_2),\\
x_3 + ix_4 &= -f_{12}(u_1,u_2),
\end{aligned}$$

mit der Auflösung

$$\boxed{\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{2}\,[(u_1+u_2)\,f_{12} - f_1 - f_2], \quad x_2 = \frac{i}{2}\,[(u_2-u_1)\,f_{12} - f_1 + f_2],\\
x_3 &= \frac{1}{2}\,[(u_1u_2-1)\,f_{12} - u_1f_1 - u_2f_2 + f],\\
x_4 &= \frac{i}{2}\,[(u_1u_2+1)\,f_{12} - u_1f_1 - u_2f_2 + f].
\end{aligned}} \tag{18}$$

Für die Vektoren $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{12}$ bekommen wir aus (18) die Komponenten

$$\begin{aligned}
\mathfrak{x}_1 &= \Big\{\frac{1}{2}\,[-f_{11} + (u_1+u_2)\,f_{121}], \frac{i}{2}\,[-f_{11} + (u_2-u_1)\,f_{121}],\\
&\qquad \frac{1}{2}\,[-u_1f_{11} + (u_1u_2-1)\,f_{121}], \frac{i}{2}\,[-u_1f_{11} + (u_1u_2+1)\,f_{121}]\Big\},\\
\mathfrak{x}_2 &= \frac{1}{2}\,[-f_{22} + (u_1u_2)\,f_{122}], \frac{i}{2}\,[f_{22} + (u_2-u_1)\,f_{122}],\\
&\frac{1}{2}\,[-u_2f_{22} + (u_1u_2-1)\,f_{122}], \frac{i}{2}\,[3u_2f_{22} + (u_1u_2+1)\,f_{122}]\Big\},
\end{aligned} \tag{19}$$

$$\mathfrak{x}_{12} = \frac{1}{2}\,f_{1212}\,\mathfrak{e},\ \mathfrak{x}_1^2 = g_{11} = 0,\ \mathfrak{x}_2^2 = g_{22} = 0,\ \mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2 = g_{12} = \frac{1}{2}\,f_{11}f_{22},\ \mathfrak{x}_{12}^2 = 0.$$

Als einfaches Beispiel setzen wir $f = \dfrac{u_1^2u_2^2}{4}$ und erhalten aus (18)

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{u_1u_2}{4}\,(u_1+u_2),\ x_2 = \frac{i\,u_1u_2}{4}\,(u_2-u_1),\ x_3 = \frac{u_1u_2}{8}\,(u_1u_2-4),\\
x_4 &= \frac{i\,u_1u_2}{8}\,(u_1u_2+4).
\end{aligned} \tag{20}$$

Für die Matrix (6) ergibt sich in diesem Falle nach (20)

$$\left\|\begin{array}{llll} \frac{u_2}{4}(u_2+2u_1), & \frac{u_1}{4}(2u_2+u_1), & \frac{1}{2}(u_1+u_2), & \frac{u_2}{2}, \frac{u_1}{2} \\ \frac{iu_2}{4}(u_2-2u_1), & \frac{iu_1}{4}(2u_2-u_1), & \frac{i}{2}(u_2-u_1), & \frac{-iu_2}{2}, \frac{iu_1}{2} \\ \frac{u_2}{4}(u_1u_2-2), & \frac{u_1}{4}(u_1u_2-2), & \frac{1}{2}(u_1u_2-1), & \frac{u_2^2}{4}, \frac{u_1^2}{4} \\ \frac{iu_2}{4}(u_1u_2+2), & \frac{iu_1}{4}(u_1u_2+2), & \frac{i}{2}(u_1u_2+1), & \frac{iu_2^2}{4}, \frac{iu_1^2}{4} \end{array}\right\| \tag{21}$$

$$(\mathfrak{x}_1,\mathfrak{x}_2,\mathfrak{x}_{11},\mathfrak{x}_{12})^2 = g_{12}^2(\mathfrak{x}_{11}\mathfrak{x}_{12})^2 = \frac{u_1^4u_2^4}{64}(\mathfrak{x}_{11}\mathfrak{x}_{12})^2.$$

An der Stelle $u_1 = 2$, $u_2 = -2$ hat das innere Produkt der dritten und vierten Kolonne der Matrix (21) den Wert 1 und die Fundamentalkomponente g_{12} den Wert 2. Mithin gilt nach (21) in einer gewissen Umgebung dieser Stelle $(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{11}, \mathfrak{x}_{12}) \neq 0$. Daher ist die Fläche (20) keine Torse. Gleichwohl verschwindet ihre Gauß'sche Krümmung identisch:

$$K = -\frac{1}{g_{12}}\frac{\partial^2 lg\, g_{12}}{\partial u_1 \partial u_2} = -\frac{1}{g_{12}}\frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2}(lg\, u_1^2 + lg\, u_2^2 - lg\, 8) \equiv 0 \left\{u_1, u_2\right\}.$$

Wegen $u_1 u_2 = -x_3 - i x_4$ genügen die kartesischen Koordinaten der Fläche (20) den Gleichungen

$$4(x_1^2 + x_2^2) = -(x_3 + i x_4)^3 = -4(x_3^2 + x_4^2),$$

d. h. die Fläche liegt auf dem isotropen Hyperkegel:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0.$$

Als ein weiteres Beispiel mit nicht identisch verschwindender Gauß'scher Krümmung wählen wir $f = \sin(u_1 + u_2)$ und erhalten

$$f_{11} = f_{22} = -\sin(u_1+u_2),\ g_{12} = \frac{1}{2}f_{11}f_{22} = \frac{1}{2}\sin^2(u_1+u_2),\ lg\, g_{12} =$$

$$= 2\, lg\, \sin(u_1+u_2) - lg\, 2,\ K = -\frac{1}{g_{12}}\frac{\partial^2 lg\, g_{12}}{\partial u_1 \partial u_2} = \frac{4}{\sin^4(u_1+u_2)} \neq 0.$$

Die Bedingung $f_{1212} \neq 0$ ist nach (18) und (19) für die Existenz der Rückkehrflächen des Systems (15) offenbar unnötig, wenn man $\mathfrak{x}_{12} = 0$ zuläßt. Dagegen ist die Forderung $f_{11} f_{22} \neq 0$ wegen der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ unerläßlich. Für $f_{12} = 0$ folgt aus

(18) die lineare Beziehung $x_3 + i\,x_4 = 0$, d. h. diese Flächen liegen in einem festen isotropen R_3. Daher gilt mit Rücksicht auf (3): *die Rückkehrflächen der zweiparametrigen isotropen R_3-Schar*

$$(u_2 + u_1)\,x_1 + i\,(u_2 - u_1)\,x_2 + (u_1\,u_2 - 1)\,x_3 + i\,(u_1\,u_2 + 1)\,x_4 + \\ + f\,(u_1, u_2) = 0, f_{11}\,f_{22} \neq 0, f_{1212} = 0$$

sind Minimalflächen in R_4 und insbesondere für $f_{12} = 0$ Minimalflächen eines festen isotropen R_3 dieses R_4.

Die Gauß'sche Krümmung dieser Minimalflächen mit $f_{12} = 0$ verschwindet identisch. Das gilt für alle Flächen eines isotropen R_3[11] und folgt hier insbesondere auch aus den Relationen

$$f_{12} = 0, f = g\,(u_1) + h\,(u_2), f_{11} = g'', f_{22} = \ddot{h}, g_{12} = \frac{1}{2}\,g''\,\ddot{f}, lg\,g_{12} = \\ = lg\,g'' + lg\,\ddot{h} - lg\,\frac{1}{2}, \frac{\partial^2 lg\,g_{12}}{\partial u_1\,\partial u_2} \equiv 0 \;\{u_1, u_2\}.$$

[11] Vgl. z. B. K. Strubecker, Math. Zeitschrift 48 (1942), S. 370.

Die algebraischen Funktionen, deren Iteration die Identität liefert.

Von
Hans Hornich, Wien.

(Eingelangt am 6. Februar 1948.)

In dieser Arbeit werden diejenigen algebraischen Funktionen untersucht, deren Iteration – neben andern analytischen Funktionen – die Identität liefert. Diese Funktionen genügen irreduziblen algebraischen Gleichungen $G(z_1, z_2) = 0$, die symmetrisch in z_1, z_2 sind $G(z_1, z_2) \equiv G(z_2, z_1)$. Eine solche algebraische Funktion vermittelt nun eine involutorische Transformation des betreffenden Gebildes in sich; die allgemeinen Transformationen eines algebraischen Gebildes in sich wurden von *A. Hurwitz*[1] u. a. näher untersucht. Hier soll eine Darstellung der involutorischen algebraischen Funktionen gegeben werden, die diese mit den ebenen algebraischen Kurven verbindet. Als Hilfsmittel hiefür dient die Doppelüberdeckung einer Kurve, wobei speziell die von *Wirtinger* entdeckte unverzweigte Doppelüberdeckung eine Rolle spielt.

I.

Wir gehen aus von der Darstellung der linearen Transformationen der Ebene durch ein Geradenbündel im Raum. Die Koeffizienten der linear gebrochenen Transformation

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \tag{1}$$

der komplexen z-Ebene werden als projektive Koordinaten $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ eines R_3 interpretiert. Die identische Transformation entspricht dem Punkt (1, 0, 0, 1), den wir mit E bezeichnen. Eine Gerade durch E und den Punkt $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ enthält die Punkte $(\alpha + k, \beta, \gamma, \delta + k)$ mit beliebigem k.

[1] Vgl. Werke I, S. 241—259 u. S. 391—430.

Die Fixpunkte einer Transformation (1) sind gegeben durch

$$z = \frac{\alpha - \delta}{2\gamma} + \frac{1}{2\gamma}\sqrt{(\alpha-\delta)^2 + 4\beta\gamma} \tag{2}$$

für $\gamma \neq 0$, während für $\gamma = 0$

$$z = \infty \quad \text{und} \quad \frac{\beta}{\delta - \alpha}, \tag{2}$$

für $\gamma = \delta - \alpha = 0$ beidemal $z = \infty$ zu setzen ist. Alle Punkte einer Gerade durch E gehören also zu Transformationen (1) mit denselben Fixpunkten und umgekehrt liegen alle Punkte, welche Transformationen (1) mit denselben Fixpunkten entsprechen, auf einer Gerade durch E. Jeder Gerade durch E entspricht also auf der komplexen Zahlenebene G (mit Einschluß des Punktes ∞) ein nicht geordnetes Zahlenpaar (z_1, z_2). Damit wird auch jede Ebene unseres R_3, die nicht E enthält, auf die Menge der nichtorientierten Punktepaare von G eineindeutig abgebildet.

Fallen die Punkte $z_1 = z_2$ zusammen, so entspricht diesem Doppelpunkt eine Erzeugende des Kegels

$$(\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma = 0 \tag{3}$$

mit der Spitze in E.

Nach (2) besteht zwischen den von E verschiedenen Punkten $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ des R_3 und den Punktepaaren (z_1, z_2) auf G die Beziehung

$$\alpha : \beta : \gamma : \delta = (z_1 + z_2 + k) : (-z_1 z_2) : 1 : k \tag{4}$$

mit geeignet gewähltem k. Für endliche z_1, z_2 und $k = \infty$ erhalten wir den Punkt E.

Sei nun $F(\xi, \eta, \zeta)$ ein homogenes Polynom n-ter Ordnung in ξ, η, ζ. Dann ist

$$F(\alpha - \delta, \beta, \gamma) = 0 \tag{5}$$

ein Kegel n-ter Ordnung mit der Spitze in E, der also mit jedem Punkt $P \neq E$ auch die Gerade durch P und E enthält. Statt des Kegels betrachten wir gleich die algebraische Kurve n-ter Ordnung $F(\xi, \eta, \zeta) = 0$ auf einer Ebene mit den homogenen Koordinaten ξ, η, ζ. Tragen wir nach (4) in (5) ein, so erhalten wir

$$F(z_1 + z_2, -z_1 z_2, 1) = 0. \tag{6}$$

Wenn das linksstehende Polynom in z_1, z_2 nicht konstant ist und nicht zerfällt, so liefert (6) eine algebraische Funktion $z_1(z_2)$, die mit ihrer inversen Funktion zusammenfällt, deren Iteration also auch die Identität ergibt.

Umgekehrt läßt sich jede derartige Funktion in dieser Weise darstellen: ist $z_1\,(z_2)$ eine algebraische Funktion, deren Iteration auch die Identität liefert, so besteht zwischen z_1 und z_2 eine irreduzible algebraische Gleichung $G\,(z_1, z_2) = 0$. Diese muß bis auf einen konstanten Faktor ungeändert bleiben, wenn wir z_1 und z_2 vertauschen: also ist $G\,(z_1, z_2) = c\,G\,(z_2, z_1)$ und $c^2 = 1$, also $c = +1$ oder $c = -1$. Ist $G\,(z_1, z_2) = -G(z_2, z_1)$, so muß $G\,(z_1, z_2)$ durch $z_1 - z_2$ teilbar sein, also, weil $G\,(z_1, z_2)$ irreduzibel ist, bis auf einen konstanten Faktor $= z_1 - z_2$ sein; diesen trivialen Fall schließen wir fortan aus. Ist $c = 1$, also $G\,(z_1, z_2) = G\,(z_2, z_1)$, so ist $G\,(z_1, z_2)$ ganz rational durch $z_1 + z_2$ und $z_1\,z_2$ darstellbar. Damit kommen wir aber auf die Gestalt (6) unserer Gleichung und damit eindeutig auf eine algebraische Kurve $F\,(\xi, \eta, \zeta) = 0$.

II.

Wir untersuchen die Beziehungen zwischen den ebenen algebraischen Kurven und den Funktionen, deren Iteration die Identität liefert, näher.

Sei K_n eine algebraische irreduzible Kurve $F\,(\xi, \eta, \zeta) = 0$ von der Ordnung n und dem Geschlecht p. Ferner sei auch $F\,(z_1 + z_2, -z_1\,z_2, 1) = 0$ irreduzibel und $\mathfrak{F}$ die Riemann'sche Fläche der dadurch definierten algebraischen Funktion $z_1\,(z_2)$. Zu jedem Punkt etwa mit $z_2 = a$ auf $\mathfrak{F}$ gehört ein $b = z_1\,(a)$; infolge der Eigenschaft von $z_1\,(z_2)$, bei Iteration auch die Identität zu liefern, gehört dann auch zu einem Punkt mit $z_2 = b$ auf $\mathfrak{F}$ wieder der Wert $a = z_1\,(b)$. Die Zahlenpaare (a, b) und (b, a) und nur diese bestimmen aber im R_3 dieselbe Gerade durch E, bzw. denselben Punkt von K_n. Den Wertepaaren (z_1, z_2) entsprechend haben wir uns daher den Kegel n-ter Ordnung $F\,(\alpha - \delta, \beta, \gamma) = 0$, bzw. die Kurve K_n mit $F\,(\xi, \eta, \zeta) = 0$ doppelt überdeckt zu denken. Die so doppelt überdeckte Kurve K_n bezeichnen wir mit $\overline{K}_n$. Doppelelemente dieser Überdeckung treten auf, wenn $z_1 = z_2$ ist; die zugehörigen Punkte auf $\mathfrak{F}$ sind unter den Wurzeln der Gleichung

$$F\,(2\,Z, -Z^2, 1) = 0 \qquad (7)$$

zu suchen. Den Punkten mit $z_1 = z_2$ auf $\mathfrak{F}$ entsprechen die gemeinsamen Erzeugenden der Kegel (3) und (5), bzw. auf der $(\xi\,\eta\,\zeta)$-Ebene die Schnittpunkte von K_n mit dem Kegelschnitt

$$Q\,(\xi, \eta, \zeta) \equiv \xi^2 + 4\,\eta\,\zeta = 0. \qquad (8)$$

Diese Doppelelemente brauchen dabei aber nicht stets Verzweigungspunkte zu sein, in deren Umgebung die beiden Kurven K_n zusammenhängen. Um den Zusammenhang von $\overline{K}_n$ zu erhalten, haben wir nach (2)

$$z = \frac{\xi + \sqrt{Q}}{2\zeta}$$

also den Verlauf der Wurzel $\sqrt{Q} = \sqrt{\xi^2 + 4\eta\zeta}$ auf K_n zu verfolgen: an einem Schnittpunkt der Kurven $F = 0$ und $Q = 0$ hängen die beiden Kurven K_n nur dann zusammen, wenn die Nullstelle des Polynoms Q an diesem Punkt von ungerader Ordnung ist[2]; an den Nullstellen gerader Ordnung findet eine solche Verzweigung nicht statt, die beiden Kurven K_n verlaufen dort getrennt.

Wir berechnen das Geschlecht P von $\overline{K}_n$. Wir denken uns die Kurve K_n in eine Riemann'sche Fläche $\mathfrak{G}$ ausgebreitet mit v Blättern und w Verzweigungen, so daß $w - 2v = 2p - 2$. Weiter sei $R(\xi, \eta, \zeta)$ eine homogene Linearform, so daß für die Schnittpunkte von $F = 0$ und $Q = 0$ stets $R \neq 0$ ist. Dann ist $\frac{Q}{R^2}$ eine algebraische Funktion auf K_n und die Wurzelfunktion $\frac{\sqrt{Q}}{R} = f$ auf $\mathfrak{G}$ betrachtet liefert die der doppeltüberdeckten Kurve $\overline{K}_n$ entsprechende Riemann'sche Fläche $\overline{\mathfrak{G}}$. Die Anzahl der Schnittpunkte von $Q = 0$ mit der Kurve K_n ist $2n$, also gerade[3]; die Anzahl der Nullstellen von Q auf K_n mit ungerader Ordnung, gleich der Anzahl der Nullstellen ungerader Ordnung von f^2 auf $\mathfrak{G}$ ist daher wieder gerade: diese Anzahl sei $2n - 2h$. Dann hat $\overline{\mathfrak{G}}$ $2w + 2n - 2h$ Verzweigungen und $2v$ Blätter, also gilt für das Geschlecht P von $\overline{\mathfrak{G}}$:

$$2P - 2 = 2w + 2n - 2h - 4v \text{ und}$$
$$P = 2p + n - h - 1 \tag{9}$$

Diese Formel[4] gibt nicht bloß das Geschlecht von $\overline{\mathfrak{G}}$ und $\overline{K}_n$, sondern auch das der Riemann'schen Fläche $\mathfrak{F}$ von z_1 (z_2); denn $\mathfrak{F}$ und $\overline{K}_n$

---

[2] D. h. es habe, wenn P eine an der betreffenden Schnittstelle nicht verschwindende Linearform der ξ, η, ζ ist, $\frac{Q}{P^2}$ als algebraische Funktion auf K_n dort eine Nullstelle ungerader Ordnung.

[3] Der Fall, daß K_n mit $Q = 0$ zusammenfällt, also F bis auf eine Konstante mit Q übereinstimmt, bleibt hier beiseite: er führt auf $(z_1 + z_2)^2 - 4z_1z_2 = (z_1 - z_2)^2 = 0$, also den Fall der Identität $z_1 = z_2$.

[4] Untersuchungen über Thetafunktionen (1894).

sind ja birational aufeinander bezogen, also bestimmen $\mathfrak{F}$ und $\overline{K}_n$ auch dasselbe algebraische Gebilde.

Die nähere Untersuchung, insbesonders auch des Falls einer zerfallenden Riemann'schen Fläche $\mathfrak{F}$ geben wir im nächsten Abschnitt. Wir fassen zunächst zusammen: *Jede ebene algebraische irreduzible Kurve* K_n $F(\xi, \eta, \zeta) = 0$ *der Ordnung* n *vom Geschlecht* p, *für welche das Polynom* $F(z_1 + z_2, -z_1 z_2, 1)$ *nicht konstant und irreduzibel ist, gibt Anlaß zu einer algebraischen Funktion* $F(z_1 + z_2, -z_1 z_2, 1) = 0$, *deren Iteration die Identität liefert*, u. zw. *auf einem Gebilde vom Geschlecht* $2p + n - h - 1$, *wo* $2n - 2h$ *die Anzahl der Schnittpunkte ungerader Ordnung von* K_n *mit dem Kegelschnitt* $Q = \xi^2 + 4\eta\zeta = 0$ *ist. Umgekehrt gehört zu jeder algebraischen Funktion, deren Iteration die Identität liefert, genau eine solche algebraische Kurve* K_n.

Es ist festzuhalten, daß die hier gegebene Beziehung zwischen einer algebraischen Kurve und einer algebraischen Funktion, deren Iteration die Identität liefert, nicht auf die zwei zugehörigen algebraischen Gebilde sich ausdehnen läßt. Denn zu jedem algebraischem Gebilde gehören ja unendlich viele algebraische ebene Kurven, insbesonders auch mit jeder Kurve alle durch projektive Transformationen aus ihr hervorgehenden Kurven. Alle diesen Kurven entsprechenden algebraischen Funktionen $z_1(z_2)$ gehören aber i. a. zu verschiedenen algebraischen Gebilden, wie man schon aus der Formel (9) für das Geschlecht P abliest, das außer von n und p noch vom Schnittsystem der Kurve mit dem Kegelschnitt $Q = 0$ abhängt.

Wir betrachten noch den Fall $n = h$ näher, nehmen aber weiter $F(z_1 + z_2, -z_1 z_2, 1)$ irreduzibel, also $\mathfrak{F}$ und $\overline{K}_n$ als zusammenhängend an. Die Kurve K_n ist wegen $n = h$ so beschaffen, daß an ihren Schnittpunkten mit $Q = 0$ das Polynom Q stets von gerader Ordnung verschwindet; wir haben es hier mit einer *unverzweigt zusammenhängenden Doppelüberdeckung der Kurve* K_n zu tun, wie sie zuerst von *W. Wirtinger*[5] eingeführt wurde. Das Geschlecht p von K_n muß dann $p > 0$ sein, da für $p = 0$ ja sonst kein Querschnitt auftreten kann, längs dessen die beiden Kurven K_n miteinander verheftet werden könnten. Das Geschlecht von $\overline{K}_n$ ist nach (9) dann $P = 2p - 1$. Die P linear unabhängigen Integrale erster Gattung von $\overline{K}_n$ setzen sich aus den p Integralen erster Gattung auf K_n, sowie $p - 1$ weiteren Integralen über Wurzelformen von K_n zusammen, wie sie von Wirtinger angegeben wurden

[5] Vgl. *A. Hurwitz*, l. c. S. 244.

und auf welche hier nicht weiter eingegangen werden soll. Für $p = 1$ ist auch $P = 1$ und die algebraischen Gebilde von K_n und $\overline{K}_n$ sind dieselben.

III.

Wir haben noch den bisher ausgeschlossenen Fall zu untersuchen, daß für eine irreduzible Kurve K_n mit $F(\xi, \eta, \zeta) = 0$ das Polynom $F(z_1 + z_2, -z_1 z_2, 1)$ eine Konstante oder ein reduzibles Polynom darstellt. Der erstere Fall tritt nur ein, wenn $F(\xi, \eta, \zeta) = \zeta$. const. ist. Sei also weiter das Polynom reduzibel u. zw.

$$F(z_1 + z_2, -z_1 z_2, 1) = F_1 . F_2 \ldots . F_r$$

wo die F_j i. a. nichtsymmetrische Polynome in z_1, z_2 sind. Für jede Gleichung $F_j(z_1, z_2) = 0$ können wir mit allen dadurch bestimmten Wertepaaren z_1, z_2 eine Kurve der (ξ, η, ζ)-Ebene bestimmen durch:

$$\xi : \eta : \zeta = (z_1 + z_2) : (-z_1 z_2) : 1. \tag{10}$$

Enthält ein F_j nur eine Variable, etwa $F_1 = (z_1 - a)$, so muß auch der Faktor $(z_2 - a)$ unter den F_j auftreten, also hat $F(z_1 + z_2, -z_1 z_2, 1)$ den Faktor $(z_1 - a)(z_2 - a) = z_1 z_2 - a(z_1 + z_2) + a^2$, also enthält $F(\xi, \eta, \zeta)$ den Faktor $-\eta - a\xi + a^2\zeta$ und ist wegen der Irreduzibilität von $F(\xi, \eta, \zeta)$ bis auf einen konstanten Faktor dieser Linearform gleich. Dann ist aber $F(\xi, \eta, \zeta) = 0$ eine Tangente an $Q = 0$ [auch im obigen Fall ist $\zeta = 0$ eine Tangente an $Q = 0$, vgl. auch den nächsten Abschnitt], welcher Kurve also nur eine konstante algebraische Funktion $z_1(z_2)$ entspricht.

Enthalte schließlich jeder der Faktoren F_j von F beide Variablen z_1 und z_2. Durch jede Gleichung $F_j = 0$ ist dann eine nichtkonstante algebraische Funktion $z_1(z_2)$ definiert; mit jeder solchen Funktion muß auch die inverse Funktion auftreten. Entweder ist nun $F_1(z_1, z_2) = F_1(z_2, z_1)$ also symmetrisch in z_1 und z_2, also die durch $F_1 = 0$ definierte algebraische Funktion $z_1(z_2)$ mit ihrer Inversen gleich; dann ist F_1 durch $z_1 + z_2$ und $z_1 z_2$ ganz rational darstellbar, die entsprechende Darstellung in ξ, η, ζ liefert einen Faktor von $F(\eta, \xi, \zeta)$ und damit auch schon die ganze Kurve $F(\xi, \eta, \zeta) = 0$. Oder ist es der Faktor $F_1(z_1, z_2)$ nicht symmetrisch in z_1 und z_2, die durch $F_1 = 0$ definierte Funktion $z_1(z_2)$ nicht gleich der Inversen; diese genüge der Gleichung $F_2 = 0$. Dann ist $F_1 . F_2$ symmetrisch in z_1, z_2, das entsprechende Polynom in ξ, η, ζ muß in $F(\xi, \eta, \zeta)$ enthalten und daher auch $= F(\xi, \eta, \zeta)$ sein. Es kann daher $F(z_1 + z_2, -z_1 z_2, 1)$ nur zwei irreduzible Faktoren F_1 und F_2

enthalten, so daß $F_1 = 0$ die zu der durch $F_2 = 0$ definierten inverse Funktion $z_1(z_2)$ definiert. Die den Gleichungen $F_1 = 0$ und $F_2 = 0$ durch (10) entsprechenden Kurven der (ξ, η, ζ)-Ebene sind natürlich gleich, die beiden Kurven K_n haben wir uns als sich überdeckende, aber nicht zusammenhängende Kurven zu denken: wir haben eine in zwei Kurven K_n zerfallende Kurve $\overline{K}_n$ vor uns.

Untersuchen wir diese näher: nach (10) folgt wieder für die zu einem Punkt der Kurve K_n gehörigen zwei z-Werte

$$z = \frac{\xi + \sqrt{Q}}{2\zeta} \text{ mit } Q = \xi^2 + 4\eta\zeta.$$

Da diese beiden Funktionen nicht zusammenhängen, darf auch an den Schnittpunkten der K_n mit $Q = 0$ keine Verzweigung vorhanden sein, durch die die beiden Funktionen zusammenhängen. Also muß Q an diesen Stellen von gerader Ordnung verschwinden, die Kurven K_n und $Q = 0$ berühren sich an allen Schnittpunkten. Auf jeder der beiden Kurven K_n ist dann $\frac{\sqrt{Q}}{\zeta}$ eine eindeutige, also algebraische Funktion.

Die Kurve K_n und die Riemann'sche Fläche der algebraischen Funktion $z_1(z_2)$ lassen sich also birational aufeinander abbilden, gehören also zu demselben Gebilde mit dem Geschlecht p.

Wir können nun auch umgekehrt von einer beliebigen algebraischen Funktion $z_1(z_2)$ ausgehen: ist deren irreduzible Gleichung $F(z_1, z_2) = 0$ symmetrisch $F(z_1, z_2) = F(z_2, z_1)$, so kommen wir nach I und II auf den Fall einer zusammenhängenden Kurve $\overline{K}_n$; ist die Gleichung $F_1(z_1, z_2) = 0$ nicht symmetrisch, so bilden wir $F_1(z_1, z_2) \cdot F_1(z_2, z_1) = F(z_1, z_2)$; nach (10) kommen wir dann von $F(z_1, z_2) = 0$ auf eine doppelt überdeckte unzusammenhängende Kurve $\overline{K}_n$, so daß die beiden Kurven K_n der Funktion $z_1(z_2)$ und ihrer Inversen entsprechen.

Zusammenfassend gilt also:

Sei $F(\xi, \eta, \zeta)$ ein irreduzibles homogenes Polynom vom Grade n und K_n die Kurve $F = 0$ vom Geschlecht p. In den Schnittpunkten von K_n mit dem Kegelschnitt $Q = \xi^2 + 4\eta\zeta = 0$ verschwinde Q stets von gerader Ordnung[6]*, so daß die durch $\sqrt{Q}$ bestimmte doppelt überdeckte Kurve $\overline{K}_n$ nirgends Verzweigungen aufweist. Ferner sei $F = 0$ nicht eine Tangente an $Q = 0$.*

---

[6] Ist dies nicht der Fall, so ist ja $F(z_1 + z_2, -z_1 z_2, 1)$ irreduzibel und es ist nach I und II vorzugehen.

Ist die Gleichung $F(z_1 + z_2, -z_1 z_2, 1) = 0$ *reduzibel, so zerfällt ihre linke Seite in zwei irreduzible Faktoren:* $F = F_1 . F_2$, *so daß durch* $F_1 = 0$ *und* $F_2 = 0$ *zwei algebraische Funktionen* $z_1(z_2)$ *vom Geschlecht* p *und von demselben algebraischen Gebilde wie* K_n *bestimmt werden, deren eine die inverse Funktion der andern ist: diesen beiden Funktionen entsprechen nach* (10) *die beiden Kurven* K_n, *in welche* $\overline{K}_n$ *zerfällt. Umgekehrt läßt sich jede nichtkonstante algebraische Funktion* $z_1(z_2)$ *nebst ihrer inversen Funktion durch eine Kurve* K_n *auf diese Art gewinnen.*

Ist $F(z_1 + z_2, -z_1 z_2, 1) = 0$ *eine irreduzible Gleichung,* $\overline{K}_n$ *also zusammenhängend, so erhalten wir nach* I *und* II *dadurch eine algebraische Funktion, deren Iteration die Identität liefert. In* K_n *haben wir dabei eine unverzweigte zusammenhängende Doppelüberdeckung mit dem Geschlecht* $P = 2p - 1$, wobei $p > 0$.

Insgesamt erhalten wir aus den irreduziblen Kurven $F(\xi, \eta, \zeta) = 0$ bei irreduziblem $F(z_1 + z_2, -z_1 z_2, 1)$ diejenigen algebraischen Funktionen, deren Iteration die Identität liefert, bei zerfallendem $F(z_1 + z_2, -z_1 z_2, 1)$ alle andern algebraischen Funktionen.

IV.

Wir geben zur Illustration der vorangegangenen Sätze einige Beispiele.

Sei die Kurve K_n die Gerade

$$a\xi + b\eta + c\zeta = 0 \tag{11}$$

Soll diese den Kegelschnitt $Q = \xi^2 + 4\eta\zeta = 0$ in zwei getrennten Punkten schneiden ($h = 0$), so ist $a^2 + bc \neq 0$ zu nehmen; setzt man nach (10) ein, so wird

$$z_1 = \frac{a z_2 + c}{b z_2 - a},$$

wir erhalten alle linearen Involutionen der Ebene. Ist (11) eine Tangente an $Q = 0$ ($h = 1$), so ist $a^2 + bc = 0$ und es zerfällt ($a \neq 0$)

$$a[a(z_1 + z_2) - b z_1 z_2 + c] = (a z_1 + c)(a - b z_2) = 0.$$

Sei K_n ein Kegelschnitt, etwa

$$\xi^2 + a\eta^2 + b\zeta^2 = 0 \;.\; (a, b \neq 0) \tag{12}$$

Ist $ab \neq 4$, so schneidet K_2 die Kurve $Q = 0$ in vier getrennten Punkten, also ist $h = 0$; dann wird $P = 1$ und mit

$$(z_1 + z_2)^2 + a z_1^2 z_2^2 + b = 0 \text{ wird} \tag{13}$$

$$z_1 = -\frac{z_2}{1 + a z_2^2} + \frac{\sqrt{-a z_2^4 - ab z_2^2 - b}}{1 + a z_2^2}$$

eine elliptische Funktion, deren Iteration die Identität liefert. Die vier Verzweigungspunkte von $\mathfrak{F}$ sind die Wurzeln aus $\left[-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b\,(a\,b-4)}{4\,a}}\right]$.

Ist $a\,b=4$, so haben wir zwei zweifache Schnittpunkte der K_2 mit $Q=0$, also $h=2$. Wegen $p=0$ muß also (13) zerfallen; tatsächlich erhalten wir zwei Funktionen:

$$z_1=\frac{z_2+i\sqrt{b}}{-i\sqrt{a}\,z_2+1} \qquad \text{und} \qquad z_1=\frac{z_2-i\sqrt{b}}{i\sqrt{a}\,z_2+1},$$

von denen die eine die inverse Funktion der andern ist.

Wir betrachten weiter die Kurve n-ter Ordnung

$$(\xi+\sqrt{Q})^n+(\xi-\sqrt{Q})^n-2\,a^n\,\zeta^n=0 \tag{14}$$

mit $Q=\xi^2+4\,\eta\,\zeta$ und $a\neq 0$. Die $2\,n$ Schnittpunkte von K_n mit $Q=0$ sind die n einfach zählenden Punkte ($\varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{n}}$)

$$(a\,\varepsilon^k,-\frac{a^2}{4}\,\varepsilon^{2k},1) \quad \text{für } k=0,1,\ldots n-1$$

und der n-fach zählende Punkt $(0,1,0)$. In den z_1 und z_2 liefert (14) die irreduzible Gleichung

$$2^{n-1}\,(z_1^n+z_2^n)=a^n$$

Die zugehörige Riemann'sche Fläche $\mathfrak{F}$ mit n Blättern hat $W=n\,(n-1)$ Verzweigungen, also ist wegen $2\,P-2=W-2\,n$ das Geschlecht

$$P=\frac{(n-1)\,(n-2)}{2}.$$

Für das weitere haben wir die Fälle eines geraden und eines ungeraden n zu unterscheiden. Sei zunächst n gerade. Dann ist die Anzahl der Nullstellen von Q mit ungerader Ordnung auf K_n gleich $2\,n-2\,h=n$ (Anzahl der einfachen Schnittpunkte von K_n mit $Q=0$). Nach der Formel (9) ist das Geschlecht von K_n

$$p=\frac{(n-2)^2}{4}.$$

Dieselbe Zahl ergibt sich etwas umständlicher, wenn man die Formel

$$p=\frac{(n-1)\,(n-2)}{2}-\delta$$

heranzieht, wo δ die Anzahl der Adjunktionsbedingungen für die K_n

adjungierten Polynome ist. Nun ist die einzige singuläre Stelle von K_n der Punkt (0, 1, 0) u. zw. ist dieser ein $\frac{n}{2}$-facher Punkt, der wie man nach einiger Rechnung erkennt, zu $\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)=\delta$ Adjunktionsbedingungen Anlaß gibt. Sei nun n ungerade. Die Anzahl der Nullstellen von Q mit ungerader Ordnung auf K_n ist $2n-2h=n+1$, woraus nach (9) folgt:

$$p=\frac{(n-1)(n-3)}{4}.$$

V.

Jede algebraische Funktion $z_1(z_2)$, deren Iteration die Identität liefert, stellt eine involutorische Transformation der Riemann'schen Fläche $\mathfrak{F}$ von $z_1(z_2)$ in sich dar.

Wir können auf jeder zweiblättrigen elliptischen Riemann'schen Fläche eine einparametrige Schar von algebraischen Funktionen angeben, deren Iteration die Identität liefert.

Wir gehen von einem Kegelschnitt aus

$$a_{11}\xi^2+a_{22}\eta^2+a_{33}\zeta^2+2a_{12}\xi\eta+2a_{23}\eta\zeta+2a_{13}\xi\zeta=0 \qquad (15)$$

mit $a_{ik}=a_{ki}$ und $|a_{ik}|\neq 0$. Setzen wir nach (10) ein, so erhalten wir

$$z_1=\frac{R_1+\sqrt{R}}{R_2}, \qquad (16)$$

wo

$$R_1=a_{12}z_2^2+(a_{23}-a_{11})z_2-a_{13},$$
$$R_2=a_{22}z_2^2-2a_{12}z_2+a_{11}$$

und $R=-A_{33}z_2^4+2A_{13}z_2^3+(-A_{11}+2A_{23})z_2^2-2A_{12}z_2-A_{22}$

ist, wo A_{ik} die mit dem entsprechenden Vorzeichen versehenen Unterdeterminanten von $|a_{ik}|$ sind.

Sei nun umgekehrt ein Polynom $a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+a_4z^4$ vorgegeben, so bestimmen wir die Größen $A_{ik}=A_{ki}$ $(i,k=1,2,3)$ so, daß

$$a_0=-A_{22},\ a_1=-2A_{12},\ a_2=(-A_{11}+2A_{23}),\ a_3=2A_{13},\ a_4=-A_{33}.$$

Setzt man $A_{23}=\alpha$, also $A_{11}=-a_2+2\alpha$, so wird

$$|A_{ik}| = \begin{vmatrix} -a_2 + 2\alpha & -\frac{a_1}{2} & \frac{a_3}{2} \\ -\frac{a_1}{2} & -a_0 & \alpha \\ \frac{a_3}{2} & \alpha & -a_4 \end{vmatrix},$$

also ist für jedes α mit Ausnahme von höchstens 3 α-Werten $|A_{ik}| = A \neq 0$. Bestimmen wir mit einem so gewählten System der A_{ik} nach den Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{3} a_{ik} A_{ij} = \delta_{kj} \cdot \sqrt{A} \qquad (k, j = 1, 2, 3)$$

die Größen a_{ik}, so wird $a_{ik} = a_{ki}$ und $|a_{ik}| = \sqrt{A} \neq 0$. Der mit diesen a_{ik} gebildete Kegelschnitt (15) gibt dann nach (16) auf der Riemann'schen Fläche von $\sqrt{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4}$ Anlaß zu einer Funktion $z_1(z_2)$, deren Iteration die Identität liefert.

Diese Transformationen in sich entsprechen auf der zugehörigen u-Ebeue des Integrals erster Gattung den Transformationen $u' = -u + \text{const.}$

Dagegen gibt es auf einer hyperelliptischen zweiblättrigen Riemann-schen Fläche keine involutorischen Transformationen in sich, außer der trivialen $z_1 = z_2$ mit Vertauschung der Blätter.

Eine solche hätte ja die Form

$$z_1 = \frac{R_1(z_2) + R_3(z_2)\sqrt{R(z_2)}}{R_2(z_2)},$$

wo R_1, R_2, R_3 Polynome und R ein solches vom Grade > 4 bedeutet. Daraus folgt für z_1 und z_2 die Gleichung

$$R_1(z_2)^2 + z_1^2 R_2(z_2)^2 - 2 z_1 R_1(z_2) R_2(z_2) - R(z_2) R_3(z_2)^2 = 0;$$

soll diese symmetrisch in z_1 und z_2 sein, so wäre sie auch in z_2 vom Grade 2 und wir sind im elliptischen Fall.

Wir fragen nun ganz allgemein, *welche algebraischen Gebilde Funktionen enthalten, deren Iterationen die Identität liefern.* Wir können nach dem Vorstehendem uns auf Gebilde vom Geschlecht $P > 1$ beschränken. Sei also $z_1(z_2)$ eine solche algebraische Funktion, deren Riemann'sche Fläche $\mathfrak{F}$ vom Geschlecht $P > 1$ sei. Dann muß sich $\mathfrak{F}$ auf eine doppelt-überdeckte ebene Kurve $\overline{K}_n$ abbilden lassen, wo $P = 2p + n - h - 1$ ist.

Sei zunächst $p = 0$, also K_n rational. Dann lassen sich die Koordinatenverhältnisse $\xi : \eta : \zeta$ der Kurve K_n rational durch einen Parameter t darstellen und es wird

$$z = R_1(t) + R_2(t)\sqrt{R(t)},$$

wo $R_1(t)$, $R_2(t)$ rationale Funktionen von t und $R(t)$ ein Polynom ohne Doppelwurzeln in t ist, u. zw. vom Grade $2P + 1$ oder $2P + 2$. Also sind z_1 und z_2 auf einer und derselben hyperelliptischen zweiblättrigen Riemann'schen Fläche vom Geschlecht P die Werte einer algebraischen Funktion auf den zwei übereinanderliegenden Punkten der Fläche.

Sei nun $p > 0$. Wegen $P = p + (p - 1) + (n - h)$ ist $P > p$. Die p Integrale erster Gattung auf K_n sind nun auch solche auf $\overline{K}_n$ oder $\mathfrak{F}$; es müssen sich also von den P Integralen erster Gattung auf $\mathfrak{F}$ p Integrale so aussondern lassen, daß diese die sämtlichen Integrale erster Gattung auf einem Gebilde vom Geschlecht p darstellen. Die P Integrale erster Gattung auf $\mathfrak{F}$ müssen also reduzibel sein. Die Thetafunktionen von $\mathfrak{F}$ müssen also, ev. nach geeigneter Transformation, in Thetafunktionen von p und solche von $P - p$ Variablen zerfallen.

Ist $z_1(z_2)$ eine algebraische Funktion, deren Iteration die Identität liefert, und ist ihre Riemann'sche Fläche $\mathfrak{F}$ vom Geschlecht $P > 1$, so gehört entweder $\mathfrak{F}$ zu einem hyperelliptischen Gebilde und z_1 wie z_2 sind die Werte einer algebraischen Funktion auf den zwei übereinanderliegenden Punkten der zweiblättrigen Riemann'schen Fläche dieses Gebildes; oder es ist das System der P Integrale erster Gattung von $\mathfrak{F}$ ein reduzibles, d. h. es lassen sich aus diesen $p < P$ Integrale aussondern, welche die Integrale erster Gattung eines Gebildes vom Geschlecht p sind.

Ist also ein algebraisches Gebilde von einem Geschlecht $P > 1$ nicht hyperelliptisch und sind die Integrale erster Gattung auf diesem nicht reduzibel, so existieren auf diesem Gebilde keine involutorischen Transformationen des Gebildes in sich.

Strahlflächen als Verallgemeinerungen der Cesàro-Kurven.

Von
Erwin Kruppa, Wien.

(Eingelangt am 2. April 1948.)

Bei der Bewegung des begleitenden Dreibeins einer Raumkurve erzeugen die Tangente und alle zu ihr in der rektifizierenden Ebene parallelen Geraden Torsen. *E. Cesàro*[1] hat die Frage nach denjenigen Kurven aufgeworfen und beantwortet, bei denen es außer den genannten Geraden noch andere gibt, die bei der Bewegung des begleitenden Dreibeins Torsen erzeugen. Ist $\varkappa$ die Krümmung, $\varkappa_1$ die Torsion, so erfüllen diese „*Cesàro-Kurven*" die Gleichung

$$a\varkappa^2 + b\varkappa\varkappa_1 + c\varkappa_1^2 + d\varkappa + e\varkappa_1 = 0, \tag{1}$$

in der die Koeffizienten konstant sind.

E. Salkowski[2] hat gezeigt, daß (1) bloß eine notwendige Bedingung für Cesàro-Kurven ist und gezeigt, daß (1) in sechs Ausnahmefällen keine Cesàro-Kurven kennzeichnet.

An anderer Stelle[3] habe ich gezeigt, daß die Theorie der Strahlflächen Analogien zur Kurventheorie zuläßt, die bisher nicht beachtet wurden. Dort habe ich u. a. Strahlflächen angegeben, die als Verallgemeinerungen der Bertrand'schen, bzw. der Mannheim'schen Kurven anzusehen ist. *Hier sollen nun die besonderen Strahlflächen behandelt werden, die in der Strahlflächentheorie dieselbe Stellung einnehmen wie die Cesàro-Kurven in der Kurventheorie.* Die Theorie der letzteren wird dabei in diesem größeren Zusammenhang neu und vertieft zu behandeln sein. Auch zwei Sätze von *P. Appel* und *W. Blaschke* finden hier ihren natürlichen Platz.

---

[1] *E. Cesàro*, Vorl. üb. natürliche Geometrie (deutsch von G. Kowalewski), 2. Aufl. (1926), § 143, 144, 145.

[2] *E. Salkowski*, Die Cesàro-Kurven. S. Ak. d. W. München (1911), S. 523—537.

[3] *E. Kruppa*, Zur Differentialgeometrie der Strahlflächen und Raumkurven. S. Ak. d. W. Wien (mat.-nat. Kl.), 1948.

In dem oben genannten Aufsatz habe ich gezeigt, daß es für die Behandlung der Zusammenhänge zwischen Strahlflächen und Raumkurven zweckmäßig ist, von der folgenden analytischen Darstellung der Strahlflächen auszugehen:

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{z}$ die ein Rechtssystem bildenden Einheitsvektoren der Erzeugenden, der Zentralnormalen und der Zentraltangente der orientierten Strahlfläche $\mathfrak{F}$. u sei die Bogenlänge auf der Striktionslinie s. Wir bilden $\mathfrak{e}(u)$ und $\mathfrak{z}(u)$ auf die Einheitskugel ab und bezeichnen mit u_1 und u_3 die Bogenlänge der sphärischen Bilder von $\mathfrak{e}(u)$, bzw. $\mathfrak{z}(u)$. Wir bilden nun

$$\varkappa = \frac{du_1}{du}, \qquad \varkappa_1 = \pm \frac{du_3}{du} \tag{2}$$

und nennen $\varkappa(u)$ die *natürliche Krümmung*, $\varkappa_1(u)$ die *natürliche Torsion* von $\mathfrak{F}$ in der Erzeugenden $\mathfrak{e}(u)$. Ferner sei $\sigma(u)$ der Winkel, den der Tangentenvektor $\mathfrak{t}$ der Striktionslinie s mit der Erzeugenden $\mathfrak{e}$ einschließt, wobei der positive Drehsinn $\mathfrak{z}$ nach $\mathfrak{e}$ durch 90^0 dreht. $\sigma(u)$ ist die *Striktion* von $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{e}(u)$.

Man kann leicht zeigen, daß $\varkappa$ und $\varkappa_1$ Ableitungsgleichungen besitzen, die formal vollkommen mit den *Frenet'schen Formeln* der Kurventheorie übereinstimmen:

$$\dot{\mathfrak{e}} = \varkappa\,\mathfrak{n}, \qquad \dot{\mathfrak{n}} = -\varkappa\,\mathfrak{e} + \varkappa_1\,\mathfrak{z}, \qquad \dot{\mathfrak{z}} = -\varkappa_1\,\mathfrak{n}. \tag{3}$$

In (3) bedeutet der Punkt die Ableitung nach der Bogenlänge der Striktionslinie. Für $\sigma = 0$ ist die Strahlfläche $\mathfrak{F}$ abwickelbar, wir sagen dann einfach, $\mathfrak{F}$ ist eine Kurve, mit der durch (2) bestimmten Krümmung und Torsion und den Frenet'schen Formeln (3), wobei u die Bogenlänge, $\mathfrak{e}$ den Tangentenvektor, $\mathfrak{n}$ den Hauptnormalenvektor und $\mathfrak{z}$ den Binormalenvektor bedeuten. Auf den Gedanken eine „*natürliche Geometrie*" der Strahlflächen auf die drei „*natürlichen Gleichungen*"

$$\varkappa = \varkappa(u), \qquad \varkappa_1 = \varkappa_1(u), \qquad \sigma = \sigma(u) \tag{4}$$

aufzubauen hat zuerst *G. Sannia*[4] hingewiesen.

Aus der Bedeutung von $\sigma(u)$ folgt unmittelbar, daß sich die Striktionslinie s durch den Ortsvektor

---

[4] *G. Sannia*, Una rappresentatione intrinseca delle rigate, Giorn. d. Mat. (1925), S. 31—47. Aus dem Referat im Jahrbuch Fortschritte der Mathematik ist zu entnehmen, daß dieser Aufsatz nur das Existenzproblem und eine Fragestellung über das Normalensystem der Strahlfläche behandelt.

$$\mathfrak{s}(u) = \int_0^u (\mathfrak{e}\cos\sigma + \mathfrak{z}\sin\sigma)\,du \tag{5_1}$$

darstellen läßt. Die Strahlfläche $\mathfrak{F}$ ist dann durch

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{s}(u) + v\,\mathfrak{e}(u) \tag{5_2}$$

darstellbar.

Es sei nun $(S;\ \mathfrak{e}, \mathfrak{n}, \mathfrak{z})$ das begleitende Dreibein in einem Punkt S der Striktionslinie und ferner a eine in diesem Achsenkreuz feste Gerade. Bei der Bewegung des begleitenden Dreibeins längs der Strahlfläche erzeugt a eine Strahlfläche. Wir fragen nun nach der *Bedingung, unter der a momentan Torsalerzeugende dieser Strahlfläche ist.* Es muß dann auf a einen Punkt *(Torsalpunkt)* geben, dessen Geschwindigkeitsvektor die Richtung von a hat oder verschwindet. Die Frage ist gleichbedeutend mit der Frage nach der *Bedingung, unter der a Bahntangente der Momentanschraubung ist.*

Sind x, y, z die Koordinaten eines Punktes von a bezüglich $(S;\ \mathfrak{e}, \mathfrak{n}, \mathfrak{z})$, so gehört zu ihm im „festen Raum", dem die Strahlfläche angehört, der Ortsvektor

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{s} + x\,\mathfrak{e} + y\,\mathfrak{n} + z\,\mathfrak{z}. \tag{6}$$

Sein Geschwindigkeitsvektor hat daher die Richtung des Vektors

$$\dot{\mathfrak{x}} = \mathfrak{e}(\cos\sigma - y\varkappa) + \mathfrak{n}(x\varkappa - z\varkappa_1) + \mathfrak{z}(\sin\sigma - y\varkappa_1). \tag{7}$$

Es seien nun X, Y, Z die Koordinaten eines auf a festen Punktes A im Achsenkreuz $(S;\ \mathfrak{e}, \mathfrak{n}, \mathfrak{z})$. Die Bedingung, daß der Punkt (x, y, z) Torsalpunkt von a auf der von a erzeugten Torse ist, lautet demnach

$$\begin{aligned} \cos\sigma - y\varkappa &= \lambda(x - X) \\ x\varkappa - z\varkappa_1 &= \lambda(y - Y) \\ \sin\sigma - y\varkappa_1 &= \lambda(z - Z), \end{aligned} \tag{8}$$

worin λ ein Proportionalitätsfaktor ist.

Sind a_i die Richtungskosinus von a in $(S;\ \mathfrak{e}, \mathfrak{n}, \mathfrak{z})$, so daß

$$x = X + e\,a_1, \qquad y = Y + e\,a_2, \qquad z = Z + e\,a_3 \tag{9}$$

gesetzt werden kann, so kann man in (8) x, y, z durch (9) ausdrücken und dann e und λe eliminieren. So entsteht

$$\begin{vmatrix} \cos\sigma - \varkappa Y & -\varkappa a_2 & a_1 \\ \varkappa X - \varkappa_1 Z & (\varkappa a_1 - \varkappa_1 a_3) & a_2 \\ \sin\sigma + \varkappa_1 Y & \varkappa_1 a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0, \tag{10}$$

oder entwickelt:

$$(\cos\sigma - \varkappa Y)\{\varkappa a_1 a_3 - \varkappa_1(a_2^2+a_3^2)\} + (\sin\sigma+\varkappa_1 Y)\{\varkappa_1 a_1 a_3 - \varkappa(a_1^2+a_2^2)\} + \\ + (\varkappa X - \varkappa_1 Z)(\varkappa_1 a_1 a_2 + \varkappa a_2 a_3). \qquad (10a)$$

Die Bahntangenten der Momentanschraubung bilden bekanntlich in jedem Augenblick einen quadratischen Strahlkomplex. Die durch einen beliebigen Raumpunkt gehenden Komplexstrahlen bilden i. a. einen orthogonalen Kegel, während die in einer beliebigen Ebene liegenden Komplexstrahlen i. a. eine Parabel umhüllen. Nach der Entstehung von (10) ist (10) für veränderliche a_1, a_2, a_3 die Gleichung des Komplexkegels mit der Spitze X, Y, Z im Achsenkreuz (S; $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{z}$).

Soll eine in (S; $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{z}$) feste Gerade bei der Bewegung des begleitenden Dreibeins längs der Strahlfläche $\mathfrak{F}$ ($\sigma, \varkappa, \varkappa_1$) eine Torse beschreiben, so muß zwischen $\sigma, \varkappa, \varkappa_1$ eine Abhängigkeit herrschen, die wir dadurch erhalten, daß wir in (10a) die Konstanten

$$Y_0 = Y, \qquad A^* = a_1 a_3, \qquad 2A = a_1^2 - 1, \qquad 2B = a_3^2 - 1,$$
$$C = a_2 a_3 X, \qquad 2D = a_1 a_2 X - a_2 a_3 Z, \qquad E = -a_1 a_2 Z \qquad (11)$$

einführen. (10a) nimmt dadurch die Form an:

$$(\cos\sigma - \varkappa Y_0)(A^*\varkappa + 2A\varkappa_1) + (\sin\sigma+\varkappa_1 Y_0)(A^*\varkappa_1 + 2B\varkappa) + \\ + C\varkappa^2 + 2D\varkappa\varkappa_1 + E\varkappa_1^2 = 0 \qquad (10b)$$

(10b) ist somit die gesuchte Bedingung. Sie ist aber bloß eine notwendige Bedingung, was für $\sigma \neq 0$ bereits daraus hervorgeht, daß nach (11) die eingeführten Konstanten nicht unabhängig sind. Für Kurven ($\sigma = 0$, „*Cesàro-Fall*") geht (10b) in die „*Cesàro-Gleichung*" (1) über.

Wir führen nun die Diskussion der möglichen Fälle durch, indem wir in (10a) der Reihe nach annehmen, daß 0, 1 oder 2 der Richtungskosinus a_1, a_2, a_3 verschwinden. Dabei wird immer stillschweigend zunächst $\sigma \neq 0$ *(windschiefe Strahlfläche)* vorausgesetzt und dann der Sonderfall $\sigma = 0$ *(Cesàro-Kurve)* behandelt. Von dem „*trivialen Fall*" $\varkappa = \text{const}$, $\varkappa_1 = \text{const}$, $\sigma = \text{const}$ *(Strahlschraubflächen)* kann abgesehen werden.

I. *Allgemeiner Fall:* $a_{1,2,3} \neq 0$, $X \neq 0$, $Z \neq 0$; (10b) *nicht reduzibel.* Da die Gerade a (X, Y, Z, a_i) die Ebene (S; $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{z}$) in einem eigentlichen Punkt schneidet, kann $Y = Y_0 = 0$ gesetzt werden. Wegen $A^* \neq 0$ kann (10b) in der Form

$$(\varkappa + 2A_0\varkappa_1)\cos\sigma + (\varkappa_1 + 2B_0\varkappa)\sin\sigma + C_0\varkappa^2 + 2D_0\varkappa\varkappa_1 + E_0\varkappa_1^2 = 0 \qquad (12)$$

geschrieben werden, worin nach (11)

$$2A_0 = \frac{a_1}{a_3} - \frac{1}{a_1 a_3}, \qquad 2B_0 = \frac{a_3}{a_1} - \frac{1}{a_1 a_3}, \qquad (13_{1,2})$$

$$C_0 = \frac{a_2}{a_1} X, \quad 2 D_0 = \frac{a_2}{a_3} X - \frac{a_2}{a_1} Z, \quad E_0 = -\frac{a_2}{a_3}. \qquad (14_{1,2,3})$$

Aus den obigen Annahmen folgt $C_0 \neq 0, E_0 \neq 0$. Aus (14) erhält man für $X:Z$ die quadratische Gleichung:

$$E_0 \frac{X^2}{Z^2} + 2 D_0 \frac{X}{Z} + C_0 = 0, \qquad (15)$$

deren Wurzeln $\mu_{(1,2)} = X:Z$ wir in der Folge als bekannt ansehen. Mit $(14_{1,3})$ findet man:

$$\frac{a_1}{a_3} = \frac{-E_0 \mu}{C_0}, \quad a_1 a_3 = \frac{-C_0}{E_0 \mu + 2 A_0 C_0}, \qquad (16)$$

$$a_1^2 = \frac{E_0 \mu}{E_0 \mu + 2 A_0 C_0}, \quad a_2^2 = \frac{2 A_0 C_0 E_0 \mu - C_0^2}{E_0 \mu (E_0 \mu + 2 A_0 C_0)},$$

$$a_3^2 = \frac{C_0^2}{E_0 \mu (E_0 \mu + 2 A_0 C_0)} \qquad (17)$$

(17) und (14_{13}) liefern nun:

$$X^2 = \frac{C_0^2 E_0^2 \mu^2}{2 A_0 C_0 E_0 \mu - C_0^2}, \qquad Z^2 = \frac{C_0^2 E_0^2}{2 A_0 C_0 E_0 \mu - C_0^2}. \qquad (18)$$

Aus (13_2) folgt für die in (13) und (14) eingeführten Konstanten die *Bedingungsgleichung:*

$$E_0 \mu (E_0 \mu + 2 A_0 C_0 - 2 B_0 C_0) - C_0^2 = 0. \qquad (19)$$

Nehmen wir an, daß (19) für eine der beiden Wurzeln $\mu = X:Z$ von (15) erfüllt ist, so können zunächst X, Z aus (18) berechnet werden, wodurch sich wegen $X:Z = \mu$ zwei zum Zentralpunkt S symmetrische Punkte (X, Z) der Zentralebene ergeben. Zu jedem dieser Punkte ergibt sich nun aus (17) unter Beachtung von $(14_{1,3})$ eindeutig die Richtung der gesuchten Geraden. Wir können sagen:

Im „allgemeinen Fall" (s. o.) sind (12) *und* (19) *die Bedingungen dafür, daß es zwei reelle oder konjugiertkomplexe Geraden gibt, die bei der Bewegung des begleitenden Dreibeins längs der windschiefen Strahlfläche Torsen beschreiben; sie vertauschen sich bei einer Drehung durch* 180^0 *um die Zentralnormale.*

Im *Cesàro-Fall* ($\sigma = 0$) sollen die im begleitenden Dreibein festen Geraden, die bei der Bewegung längs der Kurve Torsen beschreiben, *Cesàro-Geraden* heißen. Infolge des Verschwindens des Gliedes $(\varkappa_1 + 2 B_0 \varkappa)$ sin σ in (12) bleibt B_0 unbestimmt. Daher fällt die Bedingungsgleichung

(19) fort. Es sind jetzt beide Wurzeln $\mu_{(1,2)}$ verwendbar. Im übrigen gelten die voranstehenden Formeln unverändert, so daß sich für den „allgemeinen" Cesàro-Fall die vier bekannten Cesàro-Geraden ergeben.

II. $a_{1,2,3} \neq 0$, (10_6) *reduzibel.* Dieser Fall kann bei Strahlflächen konstanter Striktion, also auch bei Kurven $\sigma = 0$ auftreten. Setzen wir in (12), $\sigma = \sigma_0 = const$ voraussetzend,

$$\sin\sigma_0 + 2\,A_0\cos\sigma_0 = \mathfrak{A}, \qquad \cos\sigma_0 + 2\,B_0\sin\sigma_0 = \mathfrak{B}, \tag{20}$$

so nimmt (12) die Form an:

$$\mathfrak{B}\,\varkappa + \mathfrak{A}\,\varkappa_1 + C_0\,\varkappa^2 + 2\,D_0\,\varkappa\,\varkappa_1 + E_0\,\varkappa_1^2 = 0. \tag{21}$$

Wir nehmen nun an, daß in (21) die Summe der in $\varkappa$, $\varkappa_1$ quadratischen Glieder durch $\mathfrak{B}\,\varkappa + \mathfrak{A}\,\varkappa_1$ teilbar sei, so daß (21) die Form

$$(\varkappa\,\mathfrak{B} + \varkappa_1\,\mathfrak{A})\,(1 + \mathfrak{C}_0\,\varkappa + \mathfrak{C}_1\,\varkappa_1) = 0 \tag{22}$$

hat.

Nach (20), (21), (22) ist demnach ($\sigma \neq 0$)

$$2\,A_0 = \frac{\mathfrak{A} - \sin\sigma_0}{\cos\sigma_0}, \qquad 2\,B_0 = \frac{\mathfrak{B} - \cos\sigma}{\sin\sigma}, \tag{23}$$

$$C_0 = \mathfrak{B}\,\mathfrak{C}_0, \qquad 2\,D_0 = \mathfrak{B}\,\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{A}\,\mathfrak{C}_0, \qquad E_0 = \mathfrak{A}\,\mathfrak{C}_1.$$

Nach (22) zerfällt die Strahlfläche in eine Strahlfläche[5] $\mathfrak{F}_1$: $\varkappa\,\mathfrak{B} + \varkappa_1\,\mathfrak{A} = 0$, $\sigma = \sigma_0$, und in die Strahlfläche $\mathfrak{F}_2$: $1 + \mathfrak{C}_0\,\varkappa + \mathfrak{C}_1\,\varkappa_1 = 0$, $\sigma = \sigma_0$. Wird das begleitende Dreibein längs $\mathfrak{F}_1$ bewegt, so bleiben in den Formeln (13) bis (19), in denen man sich die Konstanten durch die gemäß (23) mit den deutschen Buchstaben bezeichneten Konstanten ausgedrückt zu denken hat, $\mathfrak{C}_0$ und $\mathfrak{C}_1$ unbestimmt. Trotzdem ist aber die Menge der Geraden, die Torsen erzeugen, nur eindimensional, weil die Bedingungsgleichung (19) eine Abhängigkeit zwischen $\mathfrak{C}_0$ und $\mathfrak{C}_1$ festlegt. — Wird das begleitende Dreibein längs $\mathfrak{F}_2$ bewegt, so bleiben $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ unbestimmt. Die Menge der Geraden, die Torsen beschreiben, ist aus dem eben angegebenen Grund wieder bloß eindimensional.

Ganz durchsichtig werden die Verhältnisse im Cesàro-Fall. Ist $\sigma = 0$, so geht (12) in

$$\varkappa + 2\,A_0\,\varkappa_1 + C_0\,\varkappa^2 + 2\,D_0\,\varkappa\,\varkappa_1 + E_0\,\varkappa_1^2 = 0, \tag{24}$$

über. Wir setzen nun voraus, daß (24) die Form

$$(\varkappa + 2\,\lambda\,\varkappa_1)\,(1 + C_0\,\varkappa + 2\,C_1\,\varkappa_1) = 0 \tag{25}$$

[5] Strahlflächen dieser Klasse werden in meinem in Fußnote 3 zitierten Aufsatz (§ 9) behandelt.

hat. Dabei sei $C_0 \neq 0$, $C_1 \neq 0$. Die Koeffizientenvergleichung von (24) und (25) ergibt

$$A_0 = \lambda, \qquad C_0 = C_0, \qquad D_0 = \lambda C_0 + C_1, \qquad E_0 = 4 \lambda C_1. \tag{26}$$

Die Bedingung für das Eintreten des Falles (25) ergibt sich aus (26) durch Elimination von λ und C_1 als:

$$4 A_0 (D_0 - A_0 C_0) - E_0 = 0. \tag{27}$$

Aus (15) folgt gemäß (26) für $\mu = X : Z$

$$E_0 \mu_{(1,2)} = -\lambda C_0 \pm (\lambda C_0 - C_1), \quad \text{also} \tag{28}$$

$$E_0 \mu_1 = -2 C_1, \qquad E_0 \mu_2 = -2 \lambda C_0. \tag{29}$$

Also gilt für $\mu = \mu_1$ gemäß (26)

$$E_0 \mu = -2 C_1, \qquad E_0 \mu + 2 A_0 C_0 = 2 (\lambda C_0 - C_1),$$
$$2 A_0 C_0 E_0 \mu - C^2 = -4 C_0 C_1 \lambda - C_0^2, \tag{30}$$

so daß sich nach (17) und (18) die Formeln

$$a_1^2 = \frac{-C_1}{\lambda C_0 - C_1}, \qquad a_2^2 = \frac{4 C_0 C_1 \lambda - C_0^2}{4 C_1 (\lambda C_0 - C_1)}, \qquad a_3^2 = \frac{-C_0^2}{4 C_1 (\lambda C_0 - C_1)}, \tag{31}$$

$$X^2 = \frac{-4 C_0 C_1^2}{4 C_1 \lambda + C_0}, \qquad Z^2 = \frac{-16 \lambda^2 C_0 C_1^2}{4 C_1 \lambda + C_0} \tag{32}$$

ergeben. Aus $X : Z = \mu$ folgt nach (30_1) und (26_3)

$$X : Z = -1 : 2 \lambda. \tag{33}$$

Nach $(14_{1,3})$ und (26_4) ist $a_1 : a_2 \; X : C_0$, $a_2 : a_3 = -4 \lambda C_1 : Z$, woraus mittels (33) $a_2 : a_3 = 2 C_1 : X$ folgt. Es ist mithin:

$$a_1 : a_2 : a_3 = 2 C_1 X : 2 C_0 C_1 : X C_0. \tag{34}$$

Nach (25) *zerfällt im vorliegenden Fall die Cesàro-Kurve in die Böschungslinie* $\varkappa + 2 \lambda \varkappa_1 = 0$ *und in die Bertrand-Kurve* $1 + C_0 \varkappa + 2 C_1 \varkappa_1 = 0$. Wird das begleitende Dreibein längs der Böschungslinie bewegt, so sind bei der Berechnung der Cesàro-Geraden in den Formeln (31) bis (34) $\lambda = const$ und C_0, C_1 als veränderlich anzusehen. Aus (33) entnimmt man, daß die Schnittpunkte der Cesàro-Geraden mit der rektifizierenden Ebene auf einer Geraden durch den Kurvenpunkt liegen. Alle Cesàro-Geraden durch einen beliebigen Punkt $A\,(X, 0, Z)$ dieser Geraden bilden einen Kegel, dessen Gleichung

$$y^2 + (z - Z)^2 + 2 \lambda (x - X)(z - Z) = 0 \tag{35}$$

aus (34) und (32_1) hervorgeht. Er ist der orthogonale Kegel der Bahntangenten der Momentanschraubung, die durch A gehen. Also bilden die Cesàro-Geraden die Strahlkongruenz, bestehend aus den Kegeln (35), deren Spitzen auf der Geraden (33) liegen.

Wir lassen nun das begleitende Dreibein längs der Bertrand-Kurve $1 + C_0 \varkappa + 2 C_1 \varkappa_1$ wandern. Jetzt sind in (31) bis (34) C_0, C_1 fest und λ veränderlich. Zu einem gewählten λ gehören nach (32) und (33) zwei zum Kurvenpunkt symmetrische Punkte $(X, 0, Z)$ und zu jedem von ihnen gemäß (34) eine Cesàro-Gerade. Diese Cesàro-Geraden sind nach (34) zur Ebene

$$2 C_1 z - C_0 x = 0 \tag{36}$$

parallel. Eliminiert man λ aus (32_1) und (33), so erhält man als Ort der Schnittpunkte der Cesàro-Geraden mit der rektifizierenden Ebene $y = 0$ den Kegelschnitt

$$2 C_1 X Z - C_0 X^2 - 4 C_0 C_1^2 = 0. \tag{37}$$

Den Ort der Cesàro-Geraden $x = X + e a_1$, $y = e a_2$, $z = Z + e a_2$ erhält man, indem man aus diesen Gleichungen und (34), (37) e, a_i, X, Z eliminiert. Man erhält so die zur Ebene (36) parallele Erzeugendenschar des hyperbolischen Paraboloids

$$2 C_1 x z - C x^2 + 4 C_1 (C_0 + y) = 0. \tag{38}$$

Wir haben nun die Cesàro-Geraden zur Wurzel (29_2) $\mu = \mu_2$ zu ermitteln. Nach (29_2), (26_3) ist mit $A_0 = \lambda$

$$E_0 \mu = -2 \lambda C_0, \quad E_0 \mu + 2 A_0 C_0 = 0, \quad X{:}Z = \mu = -C_0{:}2C_1. \tag{39}$$

Nach (17) und (29_2) sind hier die Cesàro-Geraden *Minimalgeraden*. Wegen $2 A_0 C_0 E_0 \mu - C_0^2 = -C_0^2 (4 \lambda^2 + 1)$ folgt aus (18) und (39_3)

$$X = \frac{2 i \lambda C_0}{\sqrt{4 \lambda^2 + 1}}, \qquad Z = \frac{-4 i \lambda C_1}{\sqrt{4 \lambda^2 + 1}}. \tag{40}$$

Aus ($39_{1,3}$), (40), ($14_{1,3}$) folgt

$$a_1{:}a_2{:}a_3 = 2 \lambda{:}(-i\sqrt{4 \lambda^2 + 1}) : 1; \quad \Sigma a_i^2 = 0. \tag{41}$$

Wir ermitteln nun den Ort der Cesàro-Minimalgeraden $x = X + e a_1$, $y = e a_2$, $z = Z + e a_3$, wenn das begleitende Dreibein längs der Bertrand-Kurve gleitet. Aus diesen drei Gleichungen (40) und (41) ergibt sich durch Elimination von e, a_i, X, Z, λ die gesuchte *Fläche der Cesàro-Minimal-Geraden:*

$$y^2 (C_0 + y)^2 + x^2 y^2 + [(C_0 + y) z + 2 C_1 x]^2 = 0. \tag{42}$$

Man bestätigt leicht, daß die Fläche (42) von der rektifizierenden Ebene $y = 0$ in der Doppelgeraden $x : z = -C_0 : 2\,C_1$ (in Übereinstimmung zu (39_3)) und in ihrer Ferngeraden als doppelt zählender Erzeugenden geschnitten wird.

Es ist nun noch der *Ort der Cesàro-Minimalgeraden* zur Wurzel $\mu = \mu_2$ (29_2) zu ermitteln, wenn das begleitende Dreibein längs der Böschungslinie $\varkappa + 2\,\lambda\,\varkappa_1 = 0$ gleitet. Jetzt sind C_0 und C_1 variabel und λ fest. Nach (39_3) und (41) bilden daher die Cesàro-Minimalgeraden die beiden durch (41) bestimmten Minimalstrahlbündel.

III. $a_1 = 0$, $a_{2,3} \neq 0, \neq 1$. Es kann wieder $Y = Y_0 = 0$ gesetzt werden; ferner sind nach (11) $A^* = 0$, $2\,A = -1$, $E = 0$, so daß aus (10b)

$$-\varkappa_1 \cos\sigma + 2\,\varkappa\,B \sin\sigma + C\,\varkappa^2 + 2\,D\,\varkappa\,\varkappa_1 = 0 \tag{43}$$

wird. Wegen $a_2^2 + a_3^2 = 1$ ist nach (11) $2\,B = -a_2^2$. Für die beiden Geraden, die bei der Bewegung des begleitenden Dreibeins Torsen erzeugen, ist also mittels $(11_{5,6})$

$$a_1 = 0, \qquad a_2 = (+)\sqrt{-2\,B}, \qquad a_3 = \pm\sqrt{2\,B+1} \tag{44}$$
$$X = C : a_2\,a_3, \qquad Z = -2\,D : a_2\,a_3.$$

Im Cesàro-Fall ($\sigma = 0$) geht (43) über in

$$-\varkappa_1 + C\,\varkappa^2 + 2\,D\,\varkappa\,\varkappa_1 = 0, \tag{45}$$

wobei B unbestimmt wird. Um den Ort der Cesàro-Geraden $x = X + e\,a_1$, $y = e\,a_2$, $z = Z + e\,a_3$ zu erhalten, hat man aus diesen drei Gleichungen und (44) e, a_i, X, Z, B zu eliminieren. Man erhält so die Strahlfläche 3. Grades

$$x\,y\,(C\,z + 2\,D\,x) + C\,y^2 + (C\,z + 2\,D\,x)^2 = 0. \tag{46}$$

Zu ihren Erzeugenden gehören auch die beiden Minimalgeraden der Normalebene $x = 0$ im Kurvenpunkt.

IV. $a_3 = 0$, $a_{1,2} \neq 0, \neq 1$. Auch hier kann $Y = Y_0 = 0$ angenommen werden. Ferner ist nach (11) $A^* = 0$, $2\,B = -1$, $C = 0$, so daß aus (10b)

$$2\,A\,\varkappa_1 \cos\sigma - \varkappa \sin\sigma + 2\,D\,\varkappa\,\varkappa_1 + E\,\varkappa_1^2 = 0 \tag{47}$$

wird. Wegen $a_1^2 + a_2^2 = 1$ ist nach (11) $2\,A = -a_2^2$.

Für die (zwei zur asymptotischen Ebene parallelen) Geraden, die bei der Bewegung des begleitenden Dreibeins Torsen erzeugen, ist also mit $(11_{6,7})$

$$a_1 = (+)\sqrt{2\,A+1}, \qquad a_2 = \pm\sqrt{-2\,A}, \qquad a_3 = 0; \tag{48}$$
$$X = 2\,D : a_1\,a_2, \qquad Z = -E : a_1\,a_2.$$

Im Cesàro-Fall ($\sigma = 0$) geht (47) über in

$$\varkappa_1 (2A + 2D\varkappa + E\varkappa_1) = 0. \tag{49}$$

Die Cesàro-Kurve zerfällt also in die ebene Kurve $\varkappa_1 = 0$ *und in die Bertrand-Kurve* $2A + 2D\varkappa + E\varkappa_1 = 0$. Für die erstere sind die (räumlichen) Normalen der Kurve und die in ihrer Ebene liegenden Geraden die Cesàro-Geraden. Wegen $2A = -a_2^2 \neq 0$ kann man mit $2A = \lambda$ die Gleichung der Bertrand-Kurve in der Form

$$\lambda (1 + 2D_1\varkappa + E_1\varkappa_1) = 0 \tag{50}$$

schreiben. $2A = \lambda$ kann somit in (48) als eine Veränderliche angesehen werden. Zu jedem Wert von λ gehören nach (48) zwei Cesàro-Geraden. Wir fragen nun nach dem Ort dieser Geraden $x = X + e\,a_1$, $y = e\,a_2$, $z = Z + e\,a_3$. Dazu hat man aus diesen Gleichungen und aus (48), wo $2A = \lambda$, $D = \lambda D_0$ und $E = \lambda E_0$ zu setzen ist, e, a_i, λ, X, Z zu eliminieren. Man erhält so die zur Schmiegebene $z = 0$ parallelen Erzeugenden des *hyperbolischen Paraboloids*

$$E_0\,x\,z + 2D_0 z^2 + E_0 y^2 = 0. \tag{51}$$

V. $a_2 = 0, a_{1,3} \neq 0, \neq 1$. Wegen $a_1^2 + a_3^2 = 1$ und (11) ist $A^* = a_1 a_3$, $2A = -a_3^2$, $2B = -a_1^2$, $C = D = E = 0$. Setzt man nun $2A : A^* = -a_3 : a_1 = \mathfrak{A}$ und $2B : A^* = -a_1 : a_3 = \mathfrak{A}^{-1}$, so nimmt (10b) die Form an:

$$(\varkappa + \mathfrak{A}\varkappa_1)[\sin\sigma + \varkappa_1 Y_0 + \mathfrak{A}(\cos\sigma - \varkappa Y_0)] = 0. \tag{52}$$

Die Strahlfläche (52) *zerfällt in eine Strahlfläche* $\mathfrak{F}_1 : \varkappa + \mathfrak{A}\varkappa_1 = 0$, *die einen Drehkegel als Richtkegel hat, und in die Strahlfläche* $\mathfrak{F}_2$:

$$\frac{\sin\sigma + \varkappa_1 Y_0}{\cos\sigma - \varkappa Y_0} = -\mathfrak{A} = const. \tag{53}$$

Die Strahlflächen (53) *können als Verallgemeinerung der Bertrand-Kurven angesehen werden*, wie man erkennt, wenn man in (53) $\sigma = 0$ setzt[6]. Aus den obigen Gleichungen folgt für die Cesàro-Geraden

$$a_1 = \frac{1}{(+)\sqrt{\mathfrak{A}^2 + 1}}, \qquad a_2 = 0, \qquad a_3 = \frac{-\mathfrak{A}}{(+)\sqrt{\mathfrak{A}^2 + 1}}. \tag{54}$$

Sie liegen, gleichgültig ob das begleitende Dreibein längs $\mathfrak{F}_1$ oder $\mathfrak{F}_2$ gleitet, in der Ebene $y = Y_0$ und bilden dort nach (54) ein Parallelstrahlbüschel, da X und Z nach (11) unbestimmt werden.

[6] Ich habe diese Strahlflächen in § 6 meiner in Fußnote 3 genannten Arbeit eingeführt und behandelt.

Im Cesàro-Fall $\sigma = 0$ ist nach (52)

$$(\varkappa + \mathfrak{A}\,\varkappa_1)\,[\varkappa_1\,Y_0 + \mathfrak{A}\,(1 - \varkappa\,Y_0)] = 0. \tag{55}$$

Die Cesàro-Kurve (55) *zerfällt also in eine Böschungslinie und in eine Bertrand-Kurve.* Die Cesàro-Geraden sind für beide Kurven die Parallelen der Richtung (54) in der Ebene $y = Y_0$.

VI. $a_1 = a_3 = 0$. Hier darf $Y_0 = 0$ angenommen werden. Ferner ist nach (11) $A^* = 0$, $2\,A = -1$, $2\,B = -1$, $C = D = E = 0$, so daß aus (10b)

$$\varkappa \sin\sigma + \varkappa_1 \cos\sigma = 0 \tag{56}$$

wird. (56) ist die Bedingung dafür, daß die Striktionslinie Krümmungslinie ist[7]. Es gilt also der Satz:

Wenn die Striktionslinie Krümmungslinie ist, so erzeugen die im begleitenden Dreibein festen und zur Zentralnormalen parallelen Geraden Torsen.

Im Cesàro-Fall $\sigma = 0$ ist nach (56) $\varkappa_1 = 0$; die Kurve ist eben und der obige Satz trivial.

VII. $a_1 = a_2 = 0$. Nach (11) ist $A^* = 0$, $2\,A = -1$, $2\,B = 0$, $C = D = E = 0$, so daß aus (10b)

$$\varkappa_1\,(\cos\sigma - \varkappa\,Y_0) = 0 \tag{57}$$

wird. *Nach* (57) *zerfällt die Strahlfläche in die Strahlfläche* $\mathfrak{F}_1 : \varkappa_1 = 0$, *die eine Richtebene besitzt, und in die Strahlfläche* $\mathfrak{F}_2 : \cos\sigma - \varkappa\,Y_0 = 0$, *die konstante polare Krümmung besitzt.*

Im Cesàro-Fall $\sigma = 0$ wird aus (57)

$$\varkappa_1\,(1 - \varkappa\,Y_0) = 0. \tag{58}$$

Die Cesàro-Kurve zerfällt also in eine ebene Kurve und in einen windschiefen Kreis. Nach dem Gesagten gilt der Satz:

Bei der Bewegung des begleitenden Dreibeins längs einer Strahlfläche konstanter polarer Krümmung[8] $Y_0 = \cos\sigma : \varkappa$ *(bzw. längs eines windschiefen Kreises* $Y_0 = 1 : \varkappa$*) erzeugen die im Dreikant festen und zur Zentraltangente (bzw. Binormalen) parallelen Geraden der Ebene* $y = Y_0$ *Torsen.*

---

[7] Vgl. meinen in Fußnote 3 angeführten Aufsatz (2).

[8] Die Polarebene (*S: n, z*) schneidet die benachbarte in einer Geraden, dessen Abstand vom Zentralpunkt S in der in Fußnote 3 zitierten Arbeit als *polarer Krümmungsradius* bezeichnet wurde.

VIII. $a_2 = a_3 = 0$. Nach (11) ist $A^* = 0$, $2A = 0$, $2B = -1$, $C = D = E = 0$, so daß aus (10b) wegen $\varkappa \neq 0$

$$\sin\sigma + \varkappa_1 Y = 0 \tag{59}$$

wird. Es gilt also der Satz:

Bei der Bewegung des begleitenden Dreibeins längs der Strahlfläche[9] $Y_0 = -\sin\sigma : \varkappa_1$ *erzeugen die im Dreibein festen und zur Erzeugenden parallelen Geraden der Ebene* $y = Y_0$ *Torsen.*

Im Cesàro-Fall $\sigma = 0$ ergibt sich aus (59) entweder $\varkappa_1 = 0$ (ebene Kurve) oder mit $\varkappa_1 \neq 0$, $Y_0 = 0$. Der letzte Fall ist der am Beginn dieses Aufsatzes hervorgehobene triviale Cesàro-Fall.

IX. $X = 0$, $Z = 0$. In diesem unter I. ausgeschlossenen Fall läßt sich nach (10a) die Gleichung des Komplexkegels mit der Spitze $(0, Y, 0)$, wenn man zur Abkürzung

$$\frac{\sin\sigma + \varkappa_1 Y}{\cos\sigma - \varkappa Y} = U \tag{60}$$

setzt, so schreiben:

$$U a_1^2 + \left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa} + U\right) a_2^2 + \frac{\varkappa_1}{\varkappa} a_3^2 - \left(1 + \frac{\varkappa_1}{\varkappa} U\right) a_1 a_3 = 0 \tag{61}$$

Aus (61) folgt unmittelbar, daß dieser Komplexkegel im Dreibein dann und nur dann festbleibt, wenn $\varkappa : \varkappa_1 = const$ und $U = const$ gilt. Nach (60) und (53) können wir daher sagen:

Bei einer Strahlfläche, die zur Klasse der zu den Bertrand-Kurven verwandten Strahlflächen gehört und deren Richtkegel ein Drehkegel ist, gibt es auf der Zentralnormalen einen vom Zentralpunkt verschiedenen Punkt ($Y \neq 0$) *als Spitze eines orthogonalen Kegels 2. Ord., der bei der Bewegung des begleitenden Dreibeins in diesem festbleibt, und dessen Erzeugenden Torsen erzeugen*[10]. — *Diese Aussage gilt sinngemäß für Bertrand-Kurven, deren Richtkegel ein Drehkegel ist.*

Der Fall $Y = 0$ führt auf bekannte Sätze. In diesem Fall ist gemäß (60) $U = \text{const}$ und $\sigma = \text{const}$ zu setzen.

Daneben gilt nach (61) $\varkappa : \varkappa_1 = const$. Darin liegt der von *W. Blaschke*[11] angegebenen Satz:

---

[9] D. s. die Strahlflächen, deren Zentraltangentenflächen konstante polare Krümmung besitzen.

[10] Die Spitze des Kegels beschreibt die der Strahlfläche „zugeordnete Kurve", deren Hauptnormalenfläche die Zentralnormalenfläche der Strahlfläche ist (s. Fußnote 6).

[11] *W. Blaschke*, Vorl. üb. Diff.-Geom., I. Bd., 3. Aufl. (1930), § 122.

Bei den Strahlflächen, deren Richtkegel Drehkegel sind, und deren Striktionslinie die Erzeugenden unter konstantem Winkel schneidet, ist im begleitenden Dreibein der Zentralpunkt die Spitze eines orthogonalen Kegels 2. Ord., der im Dreibein bei der Bewegung desselben festbleibt und dessen Erzeugenden Torsen beschreiben.

Für $Y = 0, \sigma = 0$ ist nach (59) $U = 0$ und (61) führt zu $\varkappa : \varkappa_1 = const.$ Darin liegt ein Sonderfall des voranstehenden Satzes, der Satz von *P. Appel*[12]:

Bei den Böschungslinien ist im begleitenden Dreibein der Kurvenpunkt die Spitze eines orthogonalen Kegels 2. Ord., der im Dreibein bei der Bewegung desselben festbleibt, und dessen Erzeugenden Torsen beschreiben.

Führt man die obige Betrachtung für einen Komplexkegel durch, dessen Spitze (X, Y, Z) nicht auf der Zentralnormalen liegt, so kommt man zum *trivialen Fall* $\varkappa_1 = const$, $\varkappa_1 = const$, $\sigma = const$ *(Strahlsschraubflächen)*, der ausgeschlossen wurde.

Wir schließen unsere Betrachtungen durch einen Hinweis darauf, daß das unter IX. Gesagte eine bemerkenswerte Dualisierung zuläßt. Den Komplexkegeln des Bahntangentenkomplexes der Momentanschraubung stehen die Komplexparabeln dual gegenüber. Die Bedingung, daß bei der Bewegung des begleitenden Dreibeins der Strahlfläche die Komplexparabel in einer im Dreibein festen Ebene allgemeiner Lage festbleibt, führt wieder zum trivialen Fall $\varkappa = const$, $\varkappa_1 = const$, $\sigma = const$. Bemerkenswerte Ergebnisse sind daher nur für besondere Ebenen zu erwarten. Wir betrachten die Komplexparabel in der *asymptotischen Ebene* $(S; \mathfrak{e}, \mathfrak{n})$. Wir erhalten ihre Tangenten, indem wir in (10) $a_3 = 0$, $Z = 0$ setzen, $Y = 0$ wählen und X als eine Veränderliche ansehen. Die Parabel ergibt sich dann als Hüllkurve der Geraden $x = \frac{a_1}{a_2} y + X$. Sie hat die Gleichung

$$x^2 = 4 \left(\frac{\sin\sigma}{\varkappa_1} + y\right) \left(\frac{\sin\sigma}{\varkappa_1} + \frac{\cos\sigma}{\varkappa}\right). \tag{62}$$

Führt man dieselbe Rechnung für die *Polarebene* $(S; \mathfrak{n}\,\mathfrak{z})$ durch, indem man in (10) $X = 0$, $Y = 0$, $a_1 = 0$ setzt und Z als veränderlich ansieht, so erhält man die Komplexparabel

$$z^2 = -4 \left(y - \frac{\cos\sigma}{\varkappa}\right) \left(\frac{\sin\sigma}{\varkappa_1} + \frac{\cos\sigma}{\varkappa}\right). \tag{63}$$

[12] *P. Appel*, Arch. Math. Phys. (1) 64 (1879), S. 19—23.

Der Vergleich von (62) mit (63) zeigt, daß die beiden Parabeln *Fokalparabeln* sind. Ferner sieht man, daß jede dieser Parabeln bei der Bewegung des begleitenden Dreibeins dann und nur dann im Dreibein festbleibt, wenn $\cos\sigma : \varkappa = const$ und $\sin\sigma : \varkappa_1 = const$ gilt. Es gilt daher (vgl. Fußnoten 8 und 9) der Satz:

Wenn eine Strahlfläche und ihre Zentraltangentenfläche konstante polare Krümmung haben, so liegt in der asymptotischen Ebene und in der Polarebene ein Paar von Fokalparabeln, die bei der Bewegung des begleitenden Dreibeins in diesem festbleiben, und deren Tangenten Torsen beschreiben.

Um die Komplexparabel in der Zentralebene $(S;\ \mathfrak{z}\ \mathfrak{e}_{,,})$ zu untersuchen, setzen wir in (10) $a_2 = 0$, $X = Y = 0$ und fassen Z als Veränderliche auf. (10) geht in $(\varkappa a_1 - \varkappa_1 a_3)(a_3\cos\sigma - a_1\sin\sigma) = 0$ über (vgl. (52) und (54)). Diese Gleichung bestimmt in der Zentralebene zwei Parallelstrahlbüschel, als zerfallene Komplexparabel. Von diesen Büscheln bleibt das eine fest für $a_3 : a_1 = \varkappa : \varkappa_1 = const$, das andere für $a_3 : a_1 = tg\,\sigma = const$. Im ersten Fall hat die Strahlfläche einen Drehkegel als Richtkegel, und die Torsen (Zylinder) erzeugenden Geraden sind alle Parallelen zur Achse des Richtkegels. Im zweiten Fall ist $\sigma = const$, und die Torsen erzeugenden Geraden in der Zentralebene sind die Tangente der Striktionslinie und die zu ihr parallelen Geraden.

Zyklographische Betrachtung der Kinematik der speziellen Relativitätstheorie.

Von
Hans Robert Müller, Graz.

Mit 4 Abbildungen.

(Eingelangt am 7. April 1948.)

Nach den fundamentalen physikalischen Erkenntnissen eines *H. A. Lorentz*, *H. Poincaré* und insbesondere *A. Einstein* wurden die geometrischen Grundlagen der speziellen Relativitätstheorie von *H. Minkowski*[1] in seinem berühmten Kölner Vortrag dargelegt, in der Folge von zahlreichen Autoren[2] näher ausgeführt und durch physikalische, wie geometrische Lehrbücher[3] verbreitet. — Ausgehend von

---

[1] *H. Minkowski*, Raum und Zeit, Vortrag gehalten auf der 80. Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte zu Köln am 21. 9. 1908, abgedruckt: *Lorentz-Einstein-Minkowski*, Sammlung „Das Relativitätsprinzip" oder Jahresber. d. Deutsch. Math. Ver. 18 (1909), p. 75 oder Ges. Abh., Bd. 2.

[2] Vgl. etwa a) *F. Klein*, Über die geometrischen Grundlagen der *Lorentz*-gruppe, Jahresber. d. Deutsch. Math. Ver. 19 (1910), p. 281 oder Ges. Abh., Bd. 1,

b) *L. Heffter*, Zur Einführung der vierdimensionalen Welt *Minkowski's*, Jahresber. d. Deutsch. Math. Ver. 21 (1912), p. 1,

c) *V. Varićak*, Über die nichteuklidische Interpretation der Relativtheorie, Jahresber. d. Deutsch. Math. Ver. 21 (1912), p. 103.

[3] Aus der Fülle der Lehrbücher seien etwa angeführt:

a) *M. v. Laue*, Das Relativitätsprinzip (1911),

b) *H. Weyl*, Raum, Zeit, Materie (4. Aufl. 1921),

c) *A. S. Eddington*, Relativitätstheorie in mathematischer Behandlung (übersetzt u. erläutert von *A. Ostrowski* u. *H. Schmidt*) (1925),

d) *F. Klein*, Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert II (1927),

e) *F. Klein*, Vorlesungen über nichteuklidische Geometrie (1928),

f) *T. Levi-Civita*, Der absolute Differentialkalkül (Deutsche Ausgabe von *A. Duschek*) (1928),

g) Enz. Math. Wiss. V. 2. D 19 (*W. Pauli* jun.), p. 539ff. (hier findet man neben dem ausf. Hinweis auf die physikalische und mathematische Literatur auch philosophische und kritische Auseinandersetzungen über die Relativitätstheorie angeführt).

Im Folgenden wird auf diese Werke unter [3a]), [3b]) usf. hingewiesen!

den *Maxwell*'schen Gleichungen legt die spezielle Relativitätstheorie der Welt eine solche raumzeitliche Struktur zugrunde, daß sie durch eine pseudoeuklidische Geometrie in einem vierdimensionalen Raum (*Minkowski*-Welt) beschrieben wird, deren zugehörige Gruppe nach *Lorentz* benannt wird. — Die Isomorphie dieser *Lorentz*-Gruppe der Relativitätstheorie und der engeren *Laguerre*'schen Gruppe der Kugelgeometrie[4] gestattete es *H. E. Timerding*[5] die wichtigsten Überlegungen und Ergebnisse der relativistischen Kinematik und Mechanik dadurch zu veranschaulichen und einer konstruktiven Behandlung zuzuführen, daß den physikalischen Begriffen, Operationen usf. die entsprechenden der Geometrie der *Laguerre*'schen Transformationsgruppe gegenübergestellt werden, wobei das geometrisch anschauliche Modell der Ausbreitung einer Kugelwelle Pate gestanden haben mag.

Andererseits ist unabhängig davon das zyklographische Abbildungsverfahren der Darstellenden Geometrie[6] mit einem einfach ausgearteten Fundamentalgebilde (absoluter Kegelschnitt C) und der darauf begründeten Pseudo- oder C-Geometrie auf das engste verknüpft. Fußend auf der bestehenden Gruppenisomorphie wird im folgenden das physikalische Geschehen der relativistischen Kinematik unter Zuhilfenahme des adäquaten zyklographischen Abbildungsverfahren direkt konstruktiv verfolgt und auf Zusammenhänge mit der C-Geometrie hingewiesen, d. h. die in der Physik ausgebildete Terminologie mit der in der Darstellenden Geometrie üblichen in Beziehung gesetzt. — Mag der Physiker durch eine abbildende Betrachtung des kinematischen Geschehens kaum neue Erkenntnisse gewinnen und nur seine Ergebnisse durch zeichnerische Methoden veranschaulicht und anderen mathematischen Disziplinen gegenübergestellt finden, so erscheint doch dem Darstellenden Geometer ein Gebiet dahingehend erschlossen, daß physikalische Probleme im Sinne der Darstellenden Geometrie einer konstruktiven Behandlung unterworfen werden können[7].

---

[4] Vgl. etwa a) *W. Blaschke-G. Thomsen*, Vorlesungen über Differentialgeometrie III (1929),
b) *L. Bieberbach*, Einleitung in die höhere Geometrie (1933).

[5] *H. E. Timerding*, Über ein einfaches geometrisches Bild der Raumzeitwelt *Minkowski's*, Jahresber. d. Deutsch. Math. Ver. 21 (1912), p. 274.

[6] Vgl. a) *L. Eckhart*, Konstruktive Abbildungsverfahren (1926),
b) *E. Müller-J. L. Krames*, Vorlesungen über Darstellende Geometrie II: Die Zyklographie (1929).

[7] Vgl. die Einleitungen zu [6a]) und [6b]).

Zu dieser zeichnerischen Behandlung sei jene Abstraktion gestattet, deren sich auch die meisten Physiker und Geometer[8] zur Erhöhung der Anschaulichkeit ihrer Darstellungen bedienen: Das kinematische Geschehen möge nicht in einem dreidimensionalen Raum vor sich gehen, sondern auf zwei räumliche Dimensionen beschränkt sein, die zugehörige Raum-Zeitwelt (*Minkowski*-Welt) also nicht vierdimensional, sondern (weil den gebräuchlichen konstruktiven Methoden leichter zugänglich) dreidimensional sein. Dieses Unterdrücken einer räumlichen Dimension führt somit aus der *Laguerre*'schen Kugel- in die *Laguerre*'sche Kreisgeometrie[9].

Weiters seien Längen- und Zeiteinheiten so normiert, daß die Lichtgeschwindigkeit $c = 1$ wird[10].

Unter diesen Voraussetzungen können wir die bekannte Gruppenisomorphie so formulieren: Die Gruppe der linearen inhomogenen Transformationen der Variablen x, y, t, die den Ausdruck

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - (t_1 - t_2)^2$$

invariant lassen (indefinite Maßbestimmung $ds^2 = dx^2 + dy^2 - dt^2$) ist isomorph

1. mit der Gruppe der *Lorentz*-Transformationen der speziellen Relativitätstheorie in der dreidimensionalen *Minkowski*-Welt (mit zwei räumlichen Dimensionen)[11]

2. mit der (engeren) *Laguerre*'schen Gruppe der Kreisgeometrie[12]

3. mit der sechsgliedrigen Gruppe der Bewegungen in der C-Geometrie, d. h. mit der Gruppe der projektiven Transformationen des dreidimensionalen Raumes, die den „absoluten Kegelschnitt" C (der Zyklographie und C-Geometrie) in sich überführen und die Längen von Strecken erhalten (oder die zugehörigen Eichflächen vertauschen)[13].

Die zyklographische Abbildung der Minkowski-Welt.

Der in der Physik üblichen Erfassung eines „substantiellen oder materiellen Punktes" durch die Koordinaten eines rechtwinkeligen cartesischen Koordinatensystems K (x, y Raumkoordinaten, t Zeitkoordinate) stellen wir die zyklographische Abbildung des „Weltpunktes"

---

[8] Vgl. [3b]), p. 157; [3d]), p. 105; [3c]), p. 318.
[9] Vgl. [4a]), p. 136, p. 268; [4b]), p. 98.
[10] Vgl. [1].
[11] Vgl. [1]; [2a]); [3a]), p. 39; [3d]), p. 59; [3e]), p. 318; [3g]), p. 567.
[12] Vgl. [4a]), p. 136; [4b]), p. 98.
[13] Vgl. [6b]), p. 126.

auf die x, y-Ebene π gegenüber. Nur um durch Rechnung unsere Konstruktionen mit den bekannten physikalischen Formeln zu koordinieren oder um eine Richtung in der Ebene π auszuzeichnen, werden wir dort die x- und y-Achsen selbst benötigen.

Das Bild der „Weltlinie", also des Lebenslaufes eines substantiellen Punktes ist als Bild einer zeitartigen Kurve eine Zykelreihe mit nullteiliger Hüllkurve, da wir ja für die Bewegung des Punktes Unterlichtgeschwindigkeit voraussetzen wollen. Ruht der Punkt im System K, erhalten wir eine Reihe konzentrischer Zykel (Kreise); gleichförmige Bewegung führt zu einer linearen elliptischen Zykelreihe als dem Bild einer zeitartigen Geraden. Lineare Nullreihen sind die Bilder von Lichtstrahlen (C-Gerade).

Die Weltmetrik von *Minkowski* ist also die auf C als absolutem Kegelschnitt begründete Metrik (C-Metrik), als Eichfläche fungiert hiebei eine C-Kugel mit reellem Radius von der C-Länge 1. — Zwei Weltpunkte, deren Verbindungsgerade raumartig ist, sich also in einer linearen hyperbolischen Zykelreihe abbildet, besitzen demnach eine reelle C-Entfernung. Liegen die Punkte auf einer zeitartigen Geraden (lineare elliptische Zykelreihe), so ist ihre C-Entfernung rein imaginär; im bes. ist also die C-Länge einer zu π normalen Strecke (Richtung der t-Achse) das i-fache ihrer natürlichen (I-metrischen) Länge. Die Minimaleigenschaft einer verschwindenden C-Entfernung ist für zwei Punkte erfüllt, die auf der Weltlinie eines mit Lichtgeschwindigkeit gleichförmig bewegten Punktes (sich selbst überlassener Lichtblitz) liegen.

Bisher wurde alles Geschehen auf das Bezugsystem K bezogen, das durch die Bildebene π und die darauf auch C-metrisch normale Zeitachse festgelegt ist. K kann als ruhend gegenüber dem Beobachter gedacht werden. Nun vollziehen wir den Übergang zu einem gleichförmig bewegten Bezugsystem K_1 (*Lorentz*-Transformation)[14]: Die von den raumartigen, zueinander C-normalen x_1- und y_1-Achsen aufgespannte Ebene π_1 ist eine raumartige Ebene, schneidet also C nicht reell (elliptische Zykelkongruenz) und steht C-normal auf der neuen Zeitachse (t_1-Achse). Dem Operieren mit den neuen Koordinaten stellen wir wiederum die zyklographische Abbildung auf die Ebene π_1 gegenüber[15]. Das Bild eines Weltpunktes P in K_1 ist somit ein C-Zykel P_1^z, also ein orientierter

---

[14] Vgl. [1]; [2a]); [3a]), p. 38; [3b]), p. 148; [3c]), p. 21; [3d]), p. 71; [3f]), p. 190; [3g]), p. 554. In [3g]) findet man auch die Literatur über die Axiomatik der *Lorentz*-Transformation angeführt.

[15] Vgl. [6b]), p. 460.

C-Kreis in der Ebene π_1, der durch Projektion von P aus C auf die Ebene π_1 erhalten wird. Der Mittelpunkt $\overline{P}_1$ des C-Zykels P_1^z wird durch C-normale Projektion von P auf π_1 gefunden, der Radius von P_1^z ist der $(-i)$-fache C-Abstand des Punktes P von der Bildebene π_1. Die Bild-C-Zykel von Weltpunkten sind paarweise perspektiv ähnliche, elliptische C-Kreise in der elliptischen Ebene π_1 und tragen eine Orientierung. Entgegengesetzt orientierte C-Zykel sind die Bilder von bez. der Ebene π_1 C-spiegelbildlichen Punkten.

Den Übergang von einem Inertialsystem zu einem anderen können wir auch als C-Bewegung der Bezugsysteme (etwa von der Lage K in die Lage K_1) deuten, ihm entspricht also der Übergang von einer allgemeinen zyklographischen Abbildung auf elliptische C-Zykel zur anderen. Hiebei möge einer physikalischen Forderung[16] zufolge, nämlich dem Festhalten von Vergangenheit und Zukunft an der betrachteten Raumstelle, die Orientierung der jeweiligen Zeitachse immer so erfolgen, daß bei festgehaltenen Raumwerten positiven Zeitinkrementen ebensolche im anderen System entsprechen, obige C-Bewegung der Bezugsysteme also kontinuierlich erfolgen kann. Durch diese Beschränkung physikalischer Natur wird jeder C-Kegel durch einen Weltpunkt eindeutig in „Vor- und Nachkegel" zerfällt und auf jeder (zeitartigen) Weltlinie ein Durchlaufungssinn definiert, der in jedem Punkt dieser Kurve von der „Vor- zur Nachwelt" führt. Die positiven Zeitachsen fallen somit immer in den Nachkegel des Raum-Zeit-Ursprunges, der übrigens der Einfachheit halber festgehalten werden kann, wenn wir von beliebigen Verschiebungen des Koordinatensystems absehen wollen. — Diese Übertragung der Orientierungen der Zeitachsen bewirkt auch die Übertragung der Orientierungen der C-Zykel bei Übergang von einem System zum anderen, also etwa von K zu K_1.

Der im Sinne der Metrik unserer Pseudogeometrie gemessenen Entfernung $\overline{\overline{PQ}}$ zweier Punkte P und Q kommt die physikalische Bedeutung einer Eigenzeit, bzw. Ruhentfernung zu[17]. In der zyklographischen Abbildung auf die Ausgangsebene π stellt die Entfernung $\overline{P^z Q^z}$ der Bildzykel P^z und Q^z eine Strecke gleicher Maßzahl, gemessen in der Metrik der Bildebene, dar: $\overline{\overline{PQ}} = \overline{P^z Q^z}$. Wir können diese Größe somit als Tangentenlänge, bzw. Sehnenstück der beiden Bildzykel konstruieren[18].

---

[16] Vgl. [3d]), p. 113; [3g]), p. 615.
[17] Vgl. [1]; [3b]), p. 158; [3d]), p. 73; [3g]), p. 556, p. 615, p. 625.
[18] Vgl. [6b]), p. 27, p. 32; p. 153.

Gleiches gilt nun von der Abbildung auf eine beliebige Ebene π_1 eines allgemeinen Bezugsystems K_1: Die C-Entfernung $\overline{PQ}$ wird auch durch die Tangentialentfernung der beiden C-Zykel P_1^z und Q_1^z, gemessen im Sinne der C-Metrik der Ebene π_1, dargestellt: $\overline{\overline{PQ}} = \overline{P_1^z Q_1^z}$. Denn legen wir etwa den Ursprung O in den Punkt Q und entscheiden wir uns für einen der beiden Schnittpunkte der Geraden $[OP] = g$ mit der Eichfläche um O — wir bezeichnen ihn mit E —, so ist, falls $G_\infty = [g\,\Omega]$ der uneigentliche Punkt von g ist, die C-Entfernung durch

$$\overline{\overline{OP}} = (OG_\infty PE) = \frac{\overline{OP}}{\overline{OE}}$$

definiert. Projizieren wir nun diese vier Punkte, deren Doppelverhältnis hier auftritt, aus dem Berührungspunkt T_∞ einer der beiden C-Ebenen durch g mit dem absoluten Kegelschnitt C, so erhalten wir vier parallele Strahlen gleichen Doppelverhältnisses, die einmal auf der zugehörigen Tangente der Bildzykel in π (d. h. auf der Spur der C-Ebene in π), dann auf der entsprechenden gemeinsamen Tangente der C-Zykel in π_1 (Spur der C-Ebene in π_1) je vier Punkte mit den Indizes O, bzw. 1 ausschneiden, für die somit gilt:

$$\overline{\overline{OP}} = (OU_\infty^O P^O E^O) = \frac{\overline{OP^O}}{\overline{OE^O}} = (OU_\infty^1 P^1 E^1) = \frac{\overline{OP^1}}{\overline{OE^1}}$$

Die durch das Relativitätsprinzip postulierte Gleichberechtigung der verschiedenen Bezugsysteme K und K_1 scheint auch durch diese Übereinstimmung des Konstruktionsvorganges für zugehörige „ruhende" Beobachter demonstriert.

Die Lorentz-Transformation.

Unter Zuhilfenahme eines Seitenrisses betrachten wir nun in der zyklographischen Abbildung den der *Lorentz*-Transformation entsprechenden Übergang vom Ausgangssystem K zu einem gleichförmig mit der Geschwindigkeit v bewegten System K_1.

In der Ebene, in der wir Kinematik betreiben (also im „Raum", nicht in der *Minkowski*-Welt), erfolge die Bewegung von K_1 gegen K so, daß die entsprechenden (räumlichen) Koordinatenachsen in beiden Systemen parallel bleiben und die Bewegungsrichtung von K_1 etwa gleich in die x-Achse von K falle, was $y = y_1$ zur Folge hat. Das Festhalten des Raum-Zeit-Nullpunktes kommt auf das Entsprechen der

Werte $x = y = t = 0$ und $x_1 = y_1 = t_1 = 0$ hinaus. Der Weltpunkt P werde in K (vgl. Abb. 1) durch den Bildzykel P^z gegeben, dem die Koordinatenwerte x, y, t zugeordnet sind. Wir ermitteln nun konstruktiv die

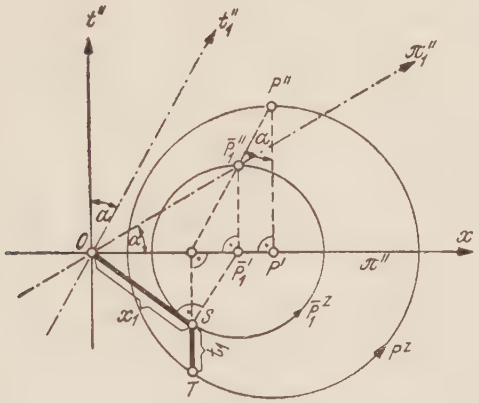

Abb. 1.

neuen Koordinaten x_1, y_1, t_1, die dem Bild-C-Zykel P_1^z im System K_1 entsprechen. — In Abb. 1 ist $\overline{OP'} = x$, $\overline{P'P} = \overline{P'P''} = t$. Wird P in Richtung der t_1-Achse (C-normal) auf π_1 projiziert (Winkelübertragung $\hat{\pi\pi_1} = \hat{t_1 t}$), so erhalten wir einen Punkt P_1, dessen C-Abstände $\overline{\overline{OP_1}} = x_1$, $\overline{\overline{P_1P}} = it_1$ von O, bzw. P die neuen Koordinaten sind. Da die C-Entfernung zweier Punkte des Raumes gleich der Entfernung ihrer Bildzykel ist, können wir leicht die dieser C-Entfernung maßzahlgleiche Tangentialentfernung, bzw. Sehnenstück in π ermitteln: $\overline{\overline{OP_1}} = \overline{OS} = \overline{OP_1^z}$, bzw. $\left| \overline{\overline{P_1P}} \right| = \left| \overline{P_1^z P^z} \right| = \overline{ST}$. Hiebei fungiert O als Nullzykel.[19] Verfolgen wir nun die Konstruktion rechnerisch! Wir führen die Bezeichnungen ein: $\overline{OP_1'} = \bar{x}$, $\overline{P_1'P_1} = \overline{P_1'P_1''} = \bar{t}$, $\overline{P_1'P'} = d$. Es gilt nun

$$v = tg\,\alpha = \frac{\bar{t}}{\bar{x}} = \frac{d}{t - \bar{t}} \tag{1}$$

Für obige Tangentialentfernungen finden wir

$$\overline{OP_1^{z\,2}} = x_1^2 = \bar{x}^2 - \bar{t}^2 \tag{2}$$

$$\left| \overline{P_1^z P^z} \right|^2 = t_1^2 = (t - \bar{t})^2 - d^2 \tag{3}$$

[19] Vgl. [6b]), p. 27, p. 32, p. 153. Im übrigen gehen die beiden Strecken x_1 und t_1 in Fig. 1 vom Punkte S aus, wovon man sich leicht überzeugt.

Somit $\bar{t} = v\bar{x}$ und $d = v(t - \bar{t}) = v(t - v\bar{x}) = x - \bar{x}$ oder daraus

$$\bar{x} = \frac{x - vt}{1 - v^2} \tag{4}$$

Dies setzen wir in (2) ein:

$$x_1^2 = \bar{x}^2 (1 - v^2) = \frac{(x - vt)^2}{1 - v^2}$$

Andererseits folgt aus (1), (3) und (4)

$$t_1^2 = (t - \bar{t})^2 (1 - v^2) = (t - v\bar{x})^2 (1 - v^2) = \frac{(t - vx)^2}{1 - v^2}$$

Wir haben somit in

$$x_1 = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}},\ y_1 = y,\ t_1 = \frac{t - vx}{\sqrt{1 - v^2}} \tag{5}$$

die bekannten Formeln der speziellen *Lorentz*-Transformation[20] gefunden, die auch als eine C-Drehung von K um die y-Achse gedeutet werden können, wenn wir etwa setzen:

$$\cosh \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}},\ \sinh \varphi = \frac{-v}{\sqrt{1 - v^2}}$$

Zeitdilatation und Eigenzeit.

Da die C-Länge einer zeitartigen Strecke rein imaginär ist, wir jedoch in unseren Bezugsystemen auf den Zeitachsen reelle Zeiten messen, können wir den Faktor $\pm i$ vermeiden, wenn wir die Zeitmetrik so begründen, daß wir eine zur ursprünglichen Eichfläche konjugierte C-Kugel vom Radius i als Eichfläche der Zeitmetrik wählen. — In einem materiellen Punkte P werde eine „Uhr" angebracht und gleichförmig, geradlinig mit der Geschwindigkeit v bewegt. Wir vergleichen nun die Zeiten, die diese Uhr für einen ruhenden und einen mit P bewegten Beobachter anzeigt, d. h. wir nehmen den Zeitvergleich zwischen dem ruhenden Ausgangssystem K und dem mit P mitbewegten System K_1 vor. Hiebei haben wir K_1 so zu wählen, daß dort der substantielle Punkt P auf „Ruhe transformiert" erscheint, also mit dem Ursprung räumliche (örtliche) Koinzidenz stattfindet, was dadurch erreicht wird,

---

[20] Vgl. [3a]), p. 38; [3c]), p. 21; [3d]), p. 71; [3g]), p. 545.

daß wir die geradlinige Weltlinie des Punktes P als neue Zeitachse (t_1-Achse) wählen. In diesem mit der Geschwindigkeit v bewegten System K_1 verschwinden nun alle räumlichen Komponenten unserer bewegten Uhr und der Zeitvergleich kann vorgenommen werden. Wählen wir für beide Messungen den gleichen raumzeitlichen Ursprung O, so gibt die gegenüber *Lorentz*-Transformationen invariante C-Entfernung $\overline{\overline{OP}} = it_1$ die „Eigenzeit"[21] der mitbewegten Uhr im Punkte P in Bezug auf den Nullpunkt 0 an. Diesen Wert t_1 können wir wiederum leicht aus der durch 0 (Nullzykel) und P^z festgelegten Zykelreihe ermitteln, indem wir den Betrag $|\overline{OP^z}|$ der Tangentialentfernung von O und P^z als durch O halbierte Sehne von P^z konstruieren[22] (vgl. Abb. 2). Es gilt $v = tg\ \alpha, \overline{OP'} = vt$

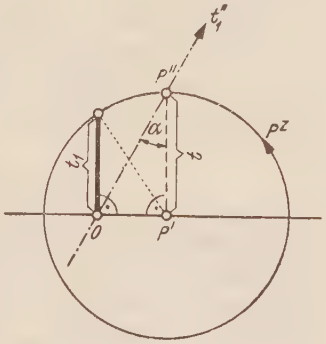

Abb. 2.

$$t_1 = t\sqrt{1 - v^2} \tag{6}$$

Die mit der Geschwindigkeit v bewegte Uhr geht also im Verhältnis $1 : \sqrt{1 - v^2}$ langsamer als die gleiche Uhr, wenn sie ruht. Der Streckenvergleich in Abb. 2 veranschaulicht somit die Zeitdilatation[23].

Betrachten wir einen beliebig bewegten Punkt P dessen Weltlinie also eine im allgemeinen nicht-lineare Zykelreihe mit nullteiliger Hüllkurve als zyklographisches Bild besitzt, so finden wir im $(-i)$-fachen der C-Bogenlänge der Weltlinie eine reelle Invariante der *Lorentz*-Gruppe, die wir als „Eigenzeit" τ des Punktes P bezeichnen[24]. Es ist

$$\tau = \int \sqrt{\overline{dt^2} - \overline{dx^2} - \overline{dy^2}}.$$

Die Eigenzeit der zu einer vorgegebenen Weltlinie gehörigen Zykelreihe kann etwa in folgender Weise konstruktiv ermittelt werden:

1. Man streckt die Zykelreihe; die Zykelreihe wird also so verbogen, daß die Achse der Reihe in eine Gerade fällt[25]. Das Biegungsbild der Weltlinie ist eine Kurve in einer zu π normalen Ebene.

---

[21] Vgl. [1]; [6b]), p. 158; [3d]), p. 73; [3g]), p. 556, p. 615, p. 625.
[22] Vgl. [6b]), p. 27, p. 32, p. 153.
[23] Vgl. [1]; [3a]), p. 40; [3g]), p. 556.
[24] Vgl. [1]; [3b]), p. 158; [3d]), p. 73; [3g]), p. 556, p. 615, p. 625.
[25] Vgl. [6b]), p. 306.

2. Das Biegungsbild spiegeln wir nun im gewöhnlichen Sinn an einer C-Geraden dieser Ebene und erhalten so eine ebene, raumartige Kurve, deren C-Bogenlänge reell ist und gleichen Betrag, wie die der Ausgangsweltlinie aufweist.

3. Nun verbiegen wir diese Zykelreihe mit reeller Hüllkurve wiederum so, daß die dargestellte Kurve in eine C-Ebene zu liegen kommt, die Zykel der Reihe also einen Speer berühren, auf dem wir die gesuchte Eigenzeit als C-Bogenlänge abgreifen können.

Lorentz-Kontraktion und Ruhlänge.

Wir brachten zwei Punkte im *Minkowski*-Raum, deren Verbindungsgerade raumartig ist. Die beiden Punkte müssen immer verschiedenen Weltlinien angehören und können durch geeignete Wahl des Bezugsystems zur zeitlichen Koinzidenz gebracht werden. Wir müssen hiezu nur die Ebene π_1 des neuen Systems K_1 so durch die beiden Punkte legen, daß die (wie später erörtert, notwendig zueinander parallelen) Tangentenrichtungen an die Weltlinien der beiden Punkte zu π_1 C-normal ausfallen. In der C-Entfernung der beiden so gleichzeitig gemachten Punkte finden wir wieder eine Invariante unserer Transformationsgruppe, die wir die „Ruhentfernung" der beiden Punkte nennen[26]. Anschaulich wird dieser Begriff, wenn wir die Geschichte eines (entsprechend der anfangs gemachten Voraussetzung) ebenen Körpers ins Auge fassen, der gegenüber dem Ausgangssystem K gleichförmig bewegt wird. Die sämtlichen Punkte des Körpers besitzen dann parallele Gerade zu Weltlinien; die „Weltröhre" des Körpers wird zu einem zylindrischen Gebilde, dem „Weltzylinder" des gleichförmig bewegten Körpers. Die Ebene π_1 (C-normal zu den Zylindererzeugenden) schneidet die „Ruhgestalt" des Körpers aus, während ein Schnitt mit der Bildebene eines beliebigen Systems (etwa des Ausgangssystems K) das Bild des bewegten Körpers für einen Beobachter liefert, der in diesem System ruht.

In Abb. 3 vergleichen wir, den historischen Beispielen[27] folgend, die Ruhlänge eines gegenüber dem Ausgangssystem K gleichförmig bewegten „Stabes" mit dessen Länge im System K.

Die linearen Zykelreihen, die als Bilder der parallelen Weltlinien der Stabendpunkte auftreten, gehen durch eine Schiebung in π ineinander über und seien durch die Zykel O und P^z, bzw. Q und R^z (O und

[26] Vgl. [1]; [3b]), p. 158; [3d]), p. 73; [3g]), p. 556, p. 615, p. 625.
[27] Vgl. [1]; [3a]), p. 40; [3b]), p. 159; [3c]), p. 36; [3g]), p. 556.

Q sind Nullzykel) gegeben. Mittels eines Seitenrisses führen wir einen C-Normalschnitt (Ebene π_1) durch O und ermitteln den Zykel R_1^z (mit dem Radius $-t < O$ in Fig. 3) als Bild des Schnittpunktes von π_1 mit

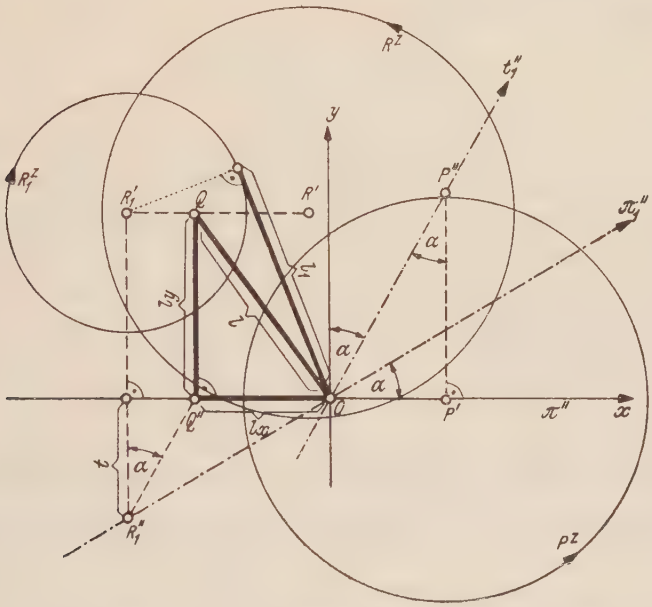

Abb. 3.

der Weltlinie $[QR]$. In der Tangentialentfernung $\overline{OR_1^z}$ haben wir die Ruhlänge $l_1 = \overline{OR_1} = \overline{OR_1^z}$ gemessen, während $l = \overline{OQ}$ die Länge der bewegten Strecke im System K darstellt. Die begleitende Rechnung bestätigt die Übereinstimmung mit der bekannten physikalischen Formel:

Sind l_x und l_y die Komponenten von l in der Bewegungsrichtung (x-Achse), bzw. normal dazu (y-Achse), so finden wir wiederum $v = tg\,\alpha$ und

$$\overline{QR_1'} = vt = \frac{t}{v} - l_x$$

Daraus

$$t = \frac{v l_x}{1 - v^2} \tag{7}$$

Für die Tangentialentfernung $\overline{OR_1^z}$ ergibt sich

$$\overline{OR_1^{z2}} = l_1^2 = \overline{OR_1'^2} - t^2 = l_y^2 + \frac{t^2}{v^2} - t^2 = l_y^2 + \frac{t^2(1-v^2)}{v^2}$$

und daher wegen (7) schließlich

$$l_1^2 = \left(\frac{l_x}{\sqrt{1-v^2}}\right)^2 + l_y^2 \tag{8}$$

Dies beinhaltet aber, daß unser gleichförmig mit der Geschwindigkeit v gegen das Ausgangssystem K bewegter Körper nur in der Bewegungsrichtung (x-Achse), also nur seine in die Bewegungsrichtung fallende Komponente eine Kontraktion im Verhältnis $1:\sqrt{1-v^2}$ gegenüber dem Ruhzustand erfährt. Für diese x-Komponente oder falls wir unseren Stab in seiner Längsrichtung bewegen ($l_y = 0$), ergibt sich die Formel der *Lorentz*-Kontraktion[28]

$$l = l_1\sqrt{1-v^2} \tag{9}$$

Spezielle Lorentz-Transformation und Laguerresche Spiegelung.

Den Formeln (5) der speziellen *Lorentz*-Transformation können wir neben der bisher geübten Rolle einer Koordinatentransformation (Übergang von einem Inertialsystem zu einem anderen) noch die Deutung einer geometrischen Punktverwandtschaft im gleichen Bezugsystem K unterschieben. Hiezu suchen wir die Transformationsformeln, die einer C-Spiegelung (an einer unter dem Winkel α gegen π geneigten Ebene π_1) entsprechen; die zyklographische Abbildung liefert die *Laguerre*'sche Spiegelung an der linearen Zykelkongruenz π_1^z.

Im Ausgangssystem K habe ein Punkt P die Koordinaten x, y, t. Der Übergang zu den Werten x_1, y_1, t_1, den Koordinaten im Bezugsystem K_1 wird durch (5) gegeben. — Wird der Punkt P an der Ebene π_1 in den Punkt P_I gespiegelt (C-Spiegelung), so sind $x_1, y_1, -t_1$ die Koordinaten von P_I in K_1, denn die zyklographische Abbildung auf π_1 liefert ergänzende C-Zykel. Im Ausgangssystem habe P_I die Koordinaten x_I, y_I, t_I, für die wegen (5) somit gilt:

$$x_1 = \frac{x_I - vt_I}{\sqrt{1-v^2}},\ y_1 = y_I,\ -t_1 = \frac{t_I - vx_I}{\sqrt{1-v^2}}$$

[28] Vgl. [1]; [3a]), p. 41; [3b]), p. 154; [3c]), p. 36; [3g]), p. 556.

Die Elimination der Werte des Systems K_1 liefert sofort

$$x_I = \frac{(1+v^2)\,x - 2\,vt}{1-v^2},\quad y_I = y,\quad t_I = \frac{2\,vx - (1+v^2)\,t}{1-v^2}. \tag{10}$$

Setzen wir nun

$$w = \frac{2\,v}{1+v^2} = \sin 2\,\alpha = tg\,\beta,$$

somit

$$\sqrt{1-w^2} = \frac{1-v^2}{1+v^2},$$

so geht (10) über in

$$x_I = \frac{x - wt}{\sqrt{1-w^2}},\quad y_I = y,\quad t_I = \frac{wx - t}{\sqrt{1-w^2}} \tag{11}$$

Dies sind die Transformationsformeln der *Laguerre*'schen Spiegelung an der Zykelkongruenz π_1^z. Einem Vergleich mit (5) entnehmen wir, daß die spezielle *Lorentz*-Transformation ($w = tg\,\beta$ = Geschwindigkeit des bewegten Bezugsystems) als Produkt zweier C-Spiegelungen, erst der Spiegelung an einer unter dem Winkel α gegen π geneigten Ebene π_1, dann der Spiegelung an der Ebene π aufgefaßt werden kann. Für die auftretenden Neigungswinkel gilt hiebei

$$tg\,\beta = \sin 2\,\alpha$$

Die Zusammensetzung einer *Lorentz*-Transformation, die die Tangentialentfernung zweier Zykel auch dem Vorzeichen nach erhält, aus einer geraden Anzahl von *Laguerre*'schen Spiegelungen, die das Vorzeichen ändern, scheint damit bestätigt.

Das Einstein'sche Additionstheorem der Geschwindigkeiten.

Dieses Theorem lehrt, die Relativgeschwindigkeiten $v_{12} = v_{21}$ zweier substantieller Punkte gegeneinander zu ermitteln, die beide in einem festen Bezugsystem K gleichförmige Bewegungen mit den Geschwindigkeiten v_1 und v_2 beschreiben und deren Bewegungsrichtungen miteinander den Winkel ϑ einschließen[29].

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir die Koinzidenz der beiden Punkte im Ursprung O des Ausgangssystem K zur Zeit $t = 0$ voraussetzen. Die Weltlinien der beiden Punkte sind also zwei

[29] Vgl. [3a]), p. 42; [3b]), p. 163; [3g]), p. 561, p. 625.

zeitartige Gerade durch O, deren Neigungswinkel α_i $(i = 1, 2)$ mit der t-Achse von K die Bedingungen $v_i = tg\,\alpha_i$ erfüllen. Die normalen Projektionen der Weltlinien auf π, also die Achsen ihrer linearen Bildzykelreihen schließen den Winkel ϑ ein. — Wir führen nun ein neues Koordinatensystem K_1 ein, das die Bewegung etwa des ersten Punktes mitmacht, in dem also dieser Punkt auf Ruhe transformiert erscheint. In K_1 suchen wir die Geschwindigkeit $v_{12} = tg\,\alpha_{12}$ des zweiten Punktes. — Zur konstruktiven Ermittlung von v_{12} oder des Winkels α_{12} greifen wir auf der Weltlinie des zweiten Punktes einen beliebigen Punkt P heraus, suchen seinen C-Normalriß $\overline{P}$ auf die Ebene π_1 von K_1 und dessen Abstände x_1, t_1 von O, bzw. P, gemessen in der Metrik des Systems K_1. Für diese C-Abstände $x_1 = \overline{\overline{OP}}$ und $it_1 = \overline{\overline{P\overline{P}}}$ suchen wir wiederum in π die maßzahlgleichen Strecken[30] als Tangentialentfernung $\overline{O\overline{P}^z}$, bzw. Sehnenstück $\left|\overline{\overline{P}^z\overline{P}^z}\right|$, um dort aus einem rechtwinkeligen Dreieck sofort den maßzahlgleichen Winkel α_{12} und damit die Geschwindigkeit v_{12} zu finden. In Abb. 4 wurde für die Konstruktion von $\overline{P}$ ein Seitenriß eingeführt, dessen Rißebene normal zu π durch die $\overline{P}$ enthaltende Fallinie f von π_1 gelegt wurde.

Durch Rechnung ergibt sich aus dieser Konstruktion die bekannte *Einstein*'sche Formel. Wir wählen die naheliegenden Bezeichnungen

$$\overline{OP'} = x,\ \overline{P'P} = t,\ \overline{\overline{P'}\overline{P}} = \bar{t},$$

dann ist[31]

$$\overline{\overline{P}O''} = \frac{\bar{t}}{v_1} = \overline{\overline{P'}P'} - \overline{O''P'} = v_1\,(t + \bar{t}) - x\cos\vartheta.$$

Daraus

$$\bar{t} = \frac{v_1}{1 - v_1^2}\,(tv_1 - x\cos\vartheta) \tag{12}$$

Andererseits ergibt sich für die Tangentialentfernungen $\overline{O\overline{P}^z} = x_1$, sowie $\overline{\overline{P}^z\overline{P}^z} = it_1$:[32]

$$x_1^2 = \overline{O\overline{P}'^2} - \bar{t}^2 = \frac{\bar{t}^2}{v_1^2}\,(1 - v_1^2) + x^2\sin^2\vartheta$$

---

[30] Vgl. [6b]), p. 27, p. 32, p. 153.
[31] In Fig. 4 ist der Radius von $\overline{P}^z$ gleich $-\bar{t} < 0$.
[32] Vgl.[6b]), p. 27, p. 32, p. 153.

Durch Einsetzen von (12) wird

$$x_1^2 = \frac{v_1^2 t^2 + x^2 - 2\, v_1\, tx \cos\vartheta - v_1^2 x^2 \sin^2\vartheta}{1 - v_1^2}$$

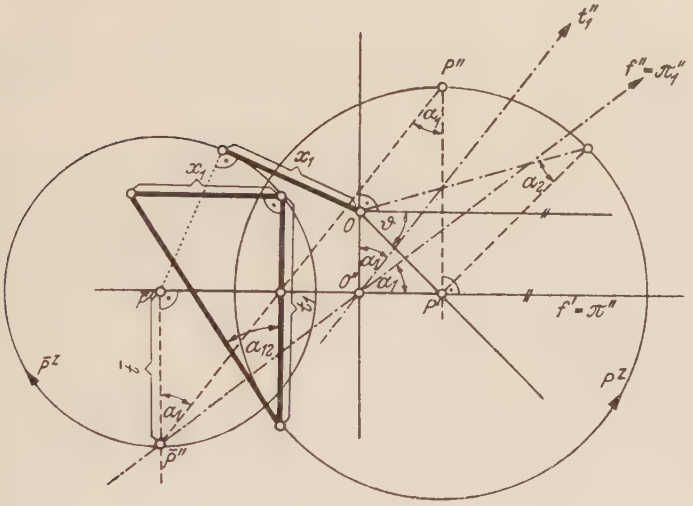

Abb. 4.

sowie

$$t_1^2 = (t + \bar{t})^2 (1 - v_1^2) = \frac{(t - v_1\, x \cos\vartheta)^2}{1 - v_1^2}$$

woraus wegen $v_2 = tg\, \alpha_2 = \frac{x}{t}$, $v_{12} = tg\, \alpha_{12} = \frac{x_1}{t_1}$ sofort die *Einstein*'sche Formel für die Relativgeschwindigkeit folgt:

$$v_{12} = \frac{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2\, v_1 v_2 \cos\vartheta - v_1^2 v_2^2 \sin^2\vartheta}}{1 - v_1 v_2 \cos\vartheta}$$

Hyperbelbewegung, starrer Körper.

In der relativistischen Mechanik spielt neben dem Bewegungsvektor noch der Beschleunigungsvektor eine Rolle[33]. Hiebei ist der Bewegungsvektor der Weltlinie eines Punktes P der Vektor mit den Koordinaten $\frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dt}{d\tau}$ im System K, also der im Sinne der C-Metrik gemessene

[33] Vgl. [1].

Tangenteneinheitsvektor an die Weltlinie in P. Denken wir uns in diesem Punkte der Weltlinie auch deren C-Krümmungskreis gezeichnet, so stimmt für beide Kurven nach Definition der letzteren der Beschleunigungsvektor $(\frac{d^2x}{d\tau^2}, \frac{d^2y}{d\tau^2}, \frac{d^2t}{d\tau^2})$ überein. Seine Richtung fällt in die C-Hauptnormale der Weltlinie, sein C-Betrag gibt die C-Krümmung der Weltlinie an. — Der Beschleunigungsvektor geht also vom Weltpunkt P zum C-Krümmungsmittelpunkt der Weltlinie in P[34].

Erfolgt die geradlinige Bewegung eines Punktes so, daß der Beschleunigungsvektor ständig konstante C-Länge besitzt, die Weltlinie also eine ebene Kurve konstanter C-Krümmung ist, dann fällt sie mit ihrem C-Krümmungskreis zusammen. — Die Weltlinie dieser auch als „zyklische Bewegung" bezeichneten gleichförmig beschleunigten, geradlinigen Bewegung der relativistischen Kinematik wird I-metrisch betrachtet zur „Hyperbelbewegung"[35].

Diese Einordnung der Begriffe der speziellen Relativitätstheorie in die C-Geometrie schließen wir noch mit einer kurzen Betrachtung über den „relativ starren Körper". *M. Born*[36] versuchte den Begriff des starren Körpers aus der klassischen Mechanik in die spezielle Relativitätstheorie zu übertragen und definierte einen Körper als starr in den kleinsten Teilchen, wenn die Weltlinien solcher kleinster Teilchen so beschaffen sind, daß ihre Ruhgestalt von der Eigenzeit unabhängig wird. Der starre Körper deformiert sich bei einer beliebigen Bewegung also stets so, daß jedes seiner infinitesimalen Elemente in jedem Augenblick für einen ruhenden Beobachter gerade jene *Lorentz*-Kontraktion gegenüber dem Ruhzustand erleidet, welche der Momentangeschwindigkeit des Elementes entspricht.

Physikalisch führte der Begriff „starrer Körper" zu Folgerungen, die dem, was man in der klassischen Mechanik darunter zu verstehen gewohnt ist, widersprechen. So zeigte *Ehrenfest*[37], daß man einen solchen Körper nicht in Rotation versetzen kann; *Herglotz* und *F. Noether* wiesen darauf hin, daß eine Beschränkung der Freiheitsgrade auftrete usf.[38].

---

[34] Vgl. [1].
[35] Vgl. [1]; [3a]), p. 105; [3g]), p. 626.
[36] *M. Born*, Ann. d. Phys. 30 (1909), p. 1. Vgl. auch [3g]), p. 689.
[37] *P. Ehrenfest*, Phys. Zeitschr. 10 (1909), p. 918. Vgl. [3g]), p. 690.
[38] a) *G. Herglotz*, Ann. d. Phys. 31 (1910), p. 393.
b) *F. Noether*, Ann. d. Phys. 31 (1910), p. 919.
Vgl. auch [3g]), p. 690.

Die Klärung des Begriffes erfolgte durch *Laue*[39] in dem Sinne, daß der Begriff des relativ starren Körpers in der relativistischen Mechanik nicht aufrechterhalten werden kann und keinen Platz hat. Trotzdem ist es vorteilhaft und auch geometrisch interessant, diesen Begriff einzuführen und etwa als „starre Bewegung" zu bezeichnen[40].

Die von *M. Born* aufgestellten Differentialgleichungen (Starrheitsbedingungen) wurden von *Herglotz*[41] vollständig integriert und können leicht geometrisch interpretiert werden: Von Ausnahmefällen abgesehen wird die Bewegung sämtlicher Punkte eines solchen Körpers bestimmt sein, wenn die Bewegung nur irgendeines einzigen Punktes des Körpers vorgeschrieben wird. Die Weltlinien sämtlicher Punkte des Körpers sind dann C-Parallelkurven zur vorgegebenen Weltlinie, irgend zwei Punkte beschreiben also im Sinne der C-Metrik äquidistante Kurven. Die Weltröhre eines solchen Körpers ist also so beschaffen, daß alle Punkte auf Ruhe transformiert werden, wenn dies für einen einzigen Punkt geschieht. Wir sehen somit, daß es nur bei einer solchen starren Bewegung überhaupt Sinn hat, von der Ruhgestalt des Körpers zu sprechen: An sämtlichen Stellen erhalten wir in einem C-Normalschnitt zur jeweiligen (für alle Punkte gleichen) Bewegungsrichtung C-kongruente Schnittgebilde.

Die Abbildung der Punkte eines linearen vierdimensionalen Raumes (nämlich der Raum-Zeit-Welt *Minkowski's*) auf die orientierten Kugeln des dreidimensionalen Raumes gestattet die Befreiung von der anfangs gemachten Beschränkung auf die Kinematik in zwei räumlichen Dimensionen (dreidimensionale Raum-Zeit-Welt *Minkowski's*) und setzt uns in den Stand, in gleicher Weise das Geschehen der relativistischen Kinematik im dreidimensionalen Raum geometrisch zu verfolgen. —

[39] *M. v. Laue*, Phys. Zeitschr. 12 (1911), p. 85. Vgl. auch [38]), p. 690.
[40] Vgl. [38]), p. 691.
[41] *G. Herglotz*, Phys. Zeitschr. 10 (1909), p. 997, sowie [38a]).

Buchbesprechungen.

Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. Von *A. Ostrowski*. I. Band: Funktionen einer Variablen. (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften. Mathematische Reihe: Band IV.) XII, 373 S. Basel: E. Birkhäuser. 1945. Geb. sfr. 47.50.

Wenn ein Mathematiker vom Range der Originalität Ostrowskis ein neues Lehrbuch über den vielbehandelten Gegenstand schreibt, so schlägt man das Werk mit großen Erwartungen auf. Diese Erwartungen werden in dem vorliegenden Fall keineswegs enttäuscht: in der Anordnung des Stoffes und seiner methodischen Durcharbeitung zeigt sich auf jeder Seite die gründliche Sachkenntnis und Lehrerfahrung des Verfassers, zahlreiche geistreiche Exkurse und historische Angaben in außergewöhnlicher Fülle tragen zum Verständnis bei und eine besonders reiche Auswahl von Übungsaufgaben, am Schluß jedes Paragraphen in sorgfältiger Steigerung der Schwierigkeit zusammengestellt, geben dem Leser Gelegenheit zur Sicherung der gewonnenen Kenntnisse.

Der vorliegende erste Teil des Werkes entspricht dem ersten Teil einer zweisemestrigen Vorlesung des Verfassers und soll, wie es im Vorworte heißt, für den theoretisch weniger interessierten Hörer als geschlossener Lehrgang der Differential- und Integralrechnung ausreichen. Das hat naturgemäß eine starke stoffliche Beschränkung zur Folge, indem die Beweise einer Reihe grundlegender Sätze (gleichmäßige Stetigkeit und Extremwerte der in einem abgeschlossenen Intervall stetigen Funktionen u. a. m.) unterdrückt und auf den zweiten Teil verschoben werden. Auch vom Begriff der oberen und unteren Grenze wird kein Gebrauch gemacht. Noch einschneidender ist der Verzicht auf die Reihenlehre; zwar werden im Schlußkapitel die Potenzreihenentwicklungen der elementaren Funktionen größtenteils bewiesen, doch lernt der Leser eben nur die Definition der Summe einer unendlichen Reihe kennen, nicht aber die einfachsten Konvergenzkriterien oder eine Übersicht über die beim Rechnen mit unendlichen Reihen erlaubten Operationen. So kommt es, daß etwa der Naturwissenschaftler doch in diesem ersten Teil der Vorlesung auch bei bescheidenen Ansprüchen nicht alles finden wird, was er braucht. Im übrigen ist die Stoffgruppierung so vorgenommen, daß nach axiomatischer Festlegung der Eigenschaften des Körpers der reellen Zahlen zuerst der Funktions-, dann der Grenzwertbegriff gründlich erörtert werden. Nach Besprechung der Hauptsätze über stetige Funktionen setzt dann die Infinitesimalrechnung mit dem Begriff des bestimmtn Integrals ein, worauf erst die Erklärung der Ableitung erfolgt. Nach Herstellung des Zusammenhanges zwischen den beiden Grundoperationen folgt je ein Kapitel über die Technik des Differenzierens und Integrierens, dem im Schlußkapitel die einfachsten Anwendungen der Differentialrechnung auf die Funktionendiskussion bis einschließlich der Taylor'schen Formel und der Potenzreihenentwicklung der elementaren Funktionen folgen.

Gegen jede Stoffauswahl lassen sich natürlich Einwände erheben, deren einige oben angedeutet wurden. Doch soll vor allem die erfreuliche Grundtendenz des Buches betont werden, die darin besteht, dem Leser an Strenge der Beweisführung nichts zu schenken, ihm aber auf Schritt und Tritt zu sagen, worum es geht und wozu alle die Sicherungen und scheinbaren Umwege erforderlich sind,

die dem ungeübten Wanderer auf seinem Weg durch das steile Berggelände der Analysis allzuleicht als unnötige Hemmnisse erscheinen mögen. So stellt das Werk eine höchst erfreuliche Bereicherung der Lehrbuchsliteratur dar, die sich auch zum Selbststudium als sehr geeignet erweisen wird.

J. Radon, Wien

Equazioni differenziali nel campo reale. Von *G. Sansone*. Zweite Auflage. I. Teil. XVII, 400 S. Bologna: N. Zanichelli. 1948.

Der erste Band des zuerst 1941 erschienenen Werkes liegt nunmehr in zweiter Auflage vor. Ohne sich mit elementaren Integrationsmethoden aufzuhalten, bringt er im ersten Kapitel die allgemeinen Existenz- und Eindeutigkeitssätze für Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen unter Berücksichtigung der neuesten Ergebnisse. Das zweite Kapitel ist den linearen Systemen bzw. Gleichungen gewidmet. Im dritten Kapitel wird die Integration durch Potenzreihen behandelt, soweit dies im reellen Gebiet möglich ist, wobei die hypergeometrische Gleichung, die Jakobischen Polynome und die Besselfunktionen ausführlich betrachtet werden. Die beiden folgenden Kapitel sind den Randwertaufgaben gewidmet und enthalten u. a. eine sehr eingehende Darstellung der Sturm-Liouvilleschen Theorie unter Einbeziehung des Falles von unendlich vielen Eigenwerten beiderlei Vorzeichens, der nach einer Methode von *G. Mamana* behandelt wird. Im letzten Kapitel werden lineare Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten und periodische Lösungen untersucht, wobei auch auf die Anwendungen der fastperiodischen Funktionen in der Theorie der Differentialgleichungen eingegangen wird.

Das Lehrbuch von Sansone stellt wohl das modernste und vollständigste Lehrbuch der Differentialgleichungen reeller Funktionen dar, das derzeit verfügbar ist. Allerdings wird über verschiedene Gebiete, die über das eigentliche Thema hinausgreifen (fastperiodische Funktionen, Variationsrechnung u. a. m.) nur in Form eines Referates, aber mit ausreichenden Literaturangaben berichtet. Hoffentlich kann der Schlußband des wertvollen Werkes bald erscheinen!

J. Radon, Wien

Analytische Geometrie. Von *W. Blaschke*. Mit 67 Textabb., 152 S. Wolfenbüttel: Wolfenbütteler Verlagsanstalt. 1948.

Der bekannte, aus Graz stammende Hamburger Geometer *W. Blaschke* hat die Zeit seiner Entlassung 1945/46 dazu benützt, zwei dem modernen Stande unseres Wissens angepaßte Lehrbücher (dieses und die *Projektive Geometrie* (Mh. Math. **52**, S. 262, 1948)) zu schreiben. Dem Verfasser ist es auf Grund seines reichhaltigen Wissens und seiner meisterhaften Darstellungsgabe gelungen, eine überraschende Fülle von Stoff in den durch die Not der Zeit bedingten Rahmen einzufügen, derart, daß die Grundgedanken und organischen Zusammenhänge überall deutlich hervortreten und neue in die Zukunft weisende Entwicklungen aufgedeckt werden. Besonders zu schätzen sind auch die geschichtliche Einleitung und die allen Absätzen beigefügten kurzen geschichtlichen Bemerkungen, welche den vielgewundenen Weg der menschlichen Erkenntnis beleuchten und von der reichen Belesenheit des Verfassers Zeugnis ablegen.

Die Darstellung ist auch in der analytischen Geometrie auf dem Vektorkalkül aufgebaut, der im einleitenden Kapitel zusammen mit den Matritzen und Grundbegriffen der analytischen Geometrie entwickelt wird. Die abstrakten Ausführungen werden jeweils durch geometrische und kinematische Anwendungen beleuchtet. Die Formeln für die Drehungen des Raumes werden durch Einführung der Quaternionenrechnung sehr vereinfacht. Das 2. Kapitel behandelt die Kugeln; u. a. werden hier im Anschluß an die Spiegelungen an Kugeln und

Kreisen die verschiedenen Arten von mechanischen Inversoren, darunter auch der von dem Wiener Mathematiker *Bereis* vor kurzem erfundene, dargestellt. Im Gegensatz zu diesen winkeltreuen Abbildungen vermitteln die Spiegelungen der *Laguerre*'schen Geometrie längentreue Abbildungen. Das 3. Kapitel ist den „Stäben" gewidmet, worunter Vektoren zu verstehen sind, die nur in ihrer Trägergeraden verschiebbar sind. Grundlegende Begriffe sind hier das „Moment" eines Stabes um einen Punkt und das von *Cayley* eingeführte Moment zweier Stäbe, das „Stabwerk" und dessen Zurückführung auf eine Normalform (resultierende Kraft und resultierendes Moment). Die Formeln für die Bewegung eines starren Körpers, für sein Gleichgewicht, die Kraftpläne und das Seileck sind unmittelbare Ergebnisse; im engsten Zusammenhang steht auch der Begriff des „Gewindes" (Nullsystem). Alles dies wird noch vereinfacht und vertieft, wenn man nach *Study* duale Zahlen und duale Vektoren einführt. Eine weitere wichtige Anwendung bilden im 4. Kapitel die Trägheitsmomente, die zwangsläufig zu den im 5. Kapitel untersuchten Quadriken überleiten. Daran schließt sich das 6. Kapitel der konfokalen Quadriken, in dem mit Heranziehung einfachster differentialgeometrischer Methoden eine Reihe interessanter Sätze über geodätische Linien auf Ellipsoiden, Räume von *Stäckel*, Fadenzeichnungen von Ellipsoiden und über *Reyes* Achsenkomplex abgeleitet werden. Das letzte Kapitel enthält eine sehr ausführliche und über den Inhalt des bisherigen weit hinausreichende Formelsammlung, die teilweise auch als Aufgabensammlung angesehen werden kann. Überall finden sich wertvolle geschichtliche Hinweise und treffende Bemerkungen hinzugefügt, welche die Zusammenhänge beleuchten, das Studium erleichtern und vertiefen.

W. Gröbner, Innsbruck

Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes. Von *R. Fueter*. (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften; Mathematische Reihe: Band II.) 180 S. Basel: E. Birkhäuser. 1945. sfr. 22.50.

Das Buch stellt eine Einführung dar. Auf einwandfreie Darstellung wird großer Wert gelegt. Das Werk ist leicht zu lesen und zeigt das bekannte große pädagogische Geschick des Altmeisters der Schweizer Mathematiker. Da nur die Grundlagen gebracht werden sollten, so konnte auf projektive Geometrie nicht eingegangen werden. Neben einer Vorlesung und zum Selbststudium ist es hervorragend geeignet. Die Ausstattung ist vortrefflich.

Inhaltsverzeichnis: Einleitung. I. Punkt und Gerade in der Ebene. II. Punkt, Ebene und Gerade im Raum. III. Kurven zweiten Grades in der Ebene. IV. Die Raumflächen zweiten Grades.

E. Hlawka, Wien

Differentialgeometrie. Von *W. Haack*. I. Teil. (Bücher der Mathematik und Naturwissenschaften. Herausgegeben von *H. Poltz*.) 136 S. Wolfenbüttel und Hannover: Wolfenbüttler Verlagsanstalt. 1948.

Das Büchlein kleinen Umfangs, ein „Notdruck" auf sehr bescheidenem Papier, aber typographisch einwandfrei und mit sehr guten Figuren ausgestattet, wird sicher den Zweck erfüllen, dem Studierenden zu billigem Preis einen im wesentlichen stofflich ausreichenden Leitfaden in die Hand zu geben.

Der vorliegende erste Teil umfaßt die Differentialgeometrie der Kurven und Flächen im R_3. Er enthält etwa den Stoff einer einführenden Vorlesung, wobei der allgemeinen Abbildung zweier Flächen aufeinander etwas mehr Raum gegönnt ist, als sonst wohl üblich, so daß auch die wichtigsten flächentreuen Abbildungen

der Kartographie behandelt werden. Der zweite Teil soll den Ricci-Kalkül bringen, doch wird die Parallelverschiebung bereits im vorliegenden Band ausführlich behandelt. Hervorzuheben wäre noch die an die Spitze des einleitenden Kapitels über Vektoren gestellte kurze und klare Erörterung über die Invarianten der Bewegungsgruppe, die den Anfänger über die Rolle der Vektorrechnung aufklären soll und diesen Zweck gewiß erreichen wird.

Bei einer knappen Darstellung wie der vorliegenden würde es gewiß unangebracht sein, der arithmetisch strengen Handhabung des analytischen Apparates allzuviel Gewicht beizulegen. Doch läßt der Verfasser — dessen verdienstvolle Leistungen auf dem Gebiet der Differentialgeometrie im übrigen bekannt sind — leider mitunter die gerade dem Anfänger gegenüber nötigen Erfordernisse an Strenge sehr außer Acht. Wenn auf S. 14 bei der Einführung der Schmiegungsebene der Taylor'sche Satz für Vektoren angeschrieben wird, so ist das Mittelwerts-θ natürlich für jede Komponente ein anderes und darf nicht einfach mit θ_1 bzw. θ_2 bezeichnet werden, wie es dort geschieht. Der auf S. 15 obenstehende Grenzwert $\lim \mathfrak{w} = \mathfrak{t}'$ kann auf dem dort angegebenen Weg überhaupt nicht ermittelt werden. Gleich darauf heißt es wörtlich, daß im Fall eines Wendepunktes „die drei benachbarten Kurvenpunkte (die Grenzwerte der drei betrachteten Punkte) in einer Geraden" liegen. Was kann sich der unverbildete Leser unter der Aussage des in Klammer stehenden Passus vorstellen? Doch nur drei identische Punkte — damit kann man aber die Redeweise „drei benachbarte Punkte" nicht erklären.

Hoffentlich wird bald eine Neuauflage des sonst so ansprechenden Büchleins Gelegenheit bieten, diesen argen Schönheitsfehler zu beseitigen.

J. Radon, Wien

Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Von *E. Stiefel*. 173 S. Basel: E. Birkhäuser. 1947. Geb. sfr. 28.50.

An manchen technischen Hochschulen wird die darstellende Geometrie als Disziplin gelehrt, die fast nur den praktischen Bedürfnissen der Technik dient. In Österreich hingegen hat Emil Müller die darstellende Geometrie in wissenschaftlicher Hinsicht weitergebildet und Beziehungen zu verschiedenen Zweigen der Geometrie hergestellt. Seither ist die „Wiener Schule" auf diesem Gebiet vorbildlich geblieben. Das ausgezeichnete Buch von Stiefel ist auch von diesem Geist erfüllt. Der erste Teil beginnt mit zugeordneten Normalrissen und bringt die Elemente der darstellenden Geometrie. Vom zweiten Teil an tritt der wissenschaftliche Standpunkt in den Vordergrund. Die Reziprozität wird an die Spitze gestellt. Zentralprojektion und Achsonometrie ergeben sich als Spezialfälle der allgemeinen projektiven Abbildungen. Der vierte Teil bringt sphärische Projektion und konforme Abbildungen. Im Anhang werden die Grundgedanken der topologischen Abbildungen entwickelt.

Das Buch ist vortrefflich ausgestattet und stellt ein wertvolles Buch in der Sammlung der Lehrbücher aus dem Gebiet der exakten Wissenschaften dar.

N. Hofreiter, Wien

Statistische Methoden für Naturwissenschafter, Mediziner und Ingenieure. Von *A. Linder*. (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften; Mathematische Reihe: Band III.) 150 S. Basel: E. Birkhäuser. 1945. Geb. sfr. 18.50.

Das vorliegende Buch stellt eine Einführung dar, welche jedoch dem Leserkreis, an den es sich wendet, alle erforderlichen Hilfsmittel bietet, um erfolgreich

auf seinem Gebiet sich statistischer Methoden bedienen zu können. Die ausgezeichnete und klare Darstellung wird wirksam unterstützt durch eine große Anzahl von Beispielen. Auch die einfachsten statistischen Begriffe werden sofort nach ihrer Einführung durch praktische Beispiele erläutert. Der mathematisch orientierte Leser wird sich vielleicht manchmal (z. B. S. 90) an eine von der üblichen mathematischen Terminologie etwas abweichende Darstellung gewöhnen müssen. Das nicht sehr vollständige Literaturverzeichnis reicht bis 1940. Alles in allem ein Buch, das seinem Zweck vollkommen gerecht wird und wie mir scheint, eine im deutschen Sprachgebiet empfindliche Lücke schließt. Die zahlreichen Figuren und die hervorragende Ausstattung erhöhen den Wert des Werkes.

Inhaltsverzeichnis: Einleitung. Statistische Maßzahlen. Statistische Prüfverfahren. Therrie der Stichproben (Wir heben hervor: Binomische, Poissonsche und Normalverteilung, die Verteilung von Pearson, „Student" und Fisher). Literaturverzeichnis. Tafeln (Normalverteilung, Pearsonsche, „Student" und Fisher-Verteilung, Quadrate der Zahlen von 1—1000).

L. Schmetterer, Wien

Versicherungsmathematik. Von *E. Zwinggi*. 199 S. Basel: E. Birkhäuser. 1945. Geb. sfr. 27.—.

Das Buch bringt die Methoden und die Formeln der Lebensversicherung, wie sie der Praktiker in seiner täglichen Arbeit benötigt. Damit und durch den relativ geringen Umfang ist schon eine Abgrenzung des Stoffes nach oben gegeben; es wird auf die kontinuierliche Methode verzichtet (den Ausgangspunkt bilden freilich die Intensität und die damit zusammenhängenden Integraldarstellungen); auch die Risikotheorie wird nicht behandelt. Den Abschluß bilden ein Kapitel über die Variation der Rechnungsgrundlagen und eines über Ausgleichsrechnung, Das Literaturverzeichnis soll nur im großen orientieren. — Die Darstellung ist ausgezeichnet; die an Stelle von Zahlentabellen oft gegebenen Schaubilder werden dem Studierenden sehr willkommen sein.

H. Hornich, Wien

Les Fondements Mathématiques de la Mécanique Quantique. Von *J. von Neumann*. Übersetzt von *A. Proca*. 336 S. Paris: Presses Universitaires de France. 1947. fr. 400.—.

Das Buch stellt eine Übersetzung des bekannten Standardwerkes von v. Neumann dar. (Vgl. die ausführliche Besprechung in den Monatsheften für Mathematik und Physik, Bd. 40, 1933, S. 31.) Daß ein so bedeutender französischer Physiker eine Übersetzung für notwendig hält, zeigt, daß das Werk trotz der stürmischen Entwicklung der letzten Jahre nichts an Bedeutung verloren hat.

E. Hlawka, Wien

Internationaler Mathematiker-Kongreß.

Der nächste internationale Mathematiker-Kongreß wird in Cambridge (Massachusetts, U. S. A.) in der Zeit vom 30. August bis 6. September 1950 stattfinden. Neben einstündigen Vorträgen, die von eingeladenen hervorragenden Mathematikern gehalten werden, finden auch kleinere Vorträge (Sektionsvorträge) statt. Die offiziellen Sprachen sind deutsch, englisch, russisch, französisch und italienisch. Alle Teilnehmer des Kongresses, soweit sie nicht Nord-Amerikaner sind, werden kostenlos untergebracht und verpflegt. Ihnen werden auch weitgehende Ermäßigungen für die Reise in den U. S. A. gewährt.

Autorenverzeichnis.

Antosiewicz, H. Über die Anwendungen des Vektorkalküls auf die Geometrie algebraischer Kurven. S. 230.

Bompiani, E. Monoidi del 3° ordine per una calotta superficiale del 4° ordine. S. 190.

Duschek, A. Über eine neue Art von algebraischen Bereichen. S. 89.

Emch, A. Neue durch stereographische Projektion erhaltene Eigenschaften der Flächen zweiter Ordnung mit Nabelpunkten. S. 189.

Funk, P. Beiträge zur zweidimensionalen Finsler'schen Geometrie. S. 194.

Gröbner, W. Über die Konstruktion von Systemen orthogonaler Polynome in ein- und zweidimensionalen Bereichen. S. 38.

Hlawka, E. Eine asymptotische Formel für Potenzsummen komplexer Linearformen. S. 248.

Hornich, H. Wilhelm Wirtinger †, S. 1. Die algebraischen Funktionen, deren Iteration die Identität liefert. S. 311.

Inzinger, R. Über eine Abbildung der Speere einer Ebene. S. 124.

Krames, J. Über allgemeine „gefährliche Raumgebiete" der Luftphotogrammetrie. S. 265.

Kruppa, E. Strahlflächen als Verallgemeinerungen der Cesàro-Kurven. S. 323.

Mayrhofer, K. Über vollständige Maße. S. 217.

Müller, H. R. Über Striktionslinien von Kurven- und Geradenscharen im elliptischen Raum. S. 138. Der Drall einer Regelfläche im elliptischen Raum. S. 181. Zyklographische Betrachtung der Kinematik der speziellen Relativitätstheorie. S. 337.

Pinl, M. Über Flächen mit isotropem mittleren Krümmungsvektor. S. 301.

Prachar, K. Zur Geometrie der Reihen. S. 255.

Radon, J. Zur mechanischen Kubatur. S. 286.

Schmetterer, L. Zum Konvergenzverhalten gewisser trigonometrischer Reihen. S. 162.

Vietoris, L. Über den Begriff der Wahrscheinlichkeit. S. 55.

Wunderlich, W. Spiegelung am elliptischen Paraboloid. S. 13.

Herausgeber, Eigentümer und Verleger: Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5. - Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Johann Radon, Wien XVIII, Herbeckstraße 5. - Druck: Tiroler Graphik Ges. m. b. H. Innsbruck, Innrain 27—29. - Papierzuweisung: 101/48/4/221.

SPRINGER-VERLAG IN WIEN

ÖSTERREICHISCHES INGENIEUR-ARCHIV

Herausgegeben von

F. Federhofer - Graz, **P. Funk** - Wien, **W. Gauster** - Wien
K. Girkmann - Wien, **F. Hopfner** - Wien, **F. Jung** - Wien
F. Magyar - Wien, **E. Melan** - Wien, **K. Wolf** - Wien

Schriftleitung
F. Magyar - Wien und **K. Wolf** - Wien

Angewandte Mathematik und Physik sind unter anderem die Arbeitsgebiete des „Österreichischen Ingenieur-Archivs". Es bringt vor allem auch solche Arbeiten, die wegen ihres umfangreichen mathematischen Apparates für die einzelnen Fachzeitschriften nicht ohne weiters in Betracht kommen.

Das Archiv erscheint nach Maßgabe des einlaufenden Materials in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden von 300—400 Seiten vereinigt werden.

Im Oktober 1948 erschien:

Band II, Heft 5 (Schlußheft)

Mit 20 Abbildungen. 58 Seiten.
(Abgeschlossen am 6. September 1948)
In Österreich S 38.—, im Ausland sfr. 16.50, $ 3.80

Inhaltsverzeichnis: *Originalarbeiten.* Federhofer, K. Berechnung der Grundschwingzahl der gleichmäßig belasteten dünnen Kreisplatte mit großer Ausbiegung. Müller-Magyari, F. Kritische Spannungen dünnwandiger Plattenwerke unter zentrischem Druck. Schuh, H. Einige Probleme der Strömung, des Wärmeüberganges und der Diffusion bei Laminarströmung längs einer ebenen Platte. Borowicka, H. Die Druckausbreitung in einer Halbscheibe bei mit der Tiefe abnehmendem Elastizitätsmodul. Koch, K. M. Ein neues Bild des metallischen Leistungsmechanismus. Parkus, H. Die Torsion geschlitzter Hohlwellen. Buchbesprechungen.

Zu beziehen durch jede Buchhandlung

Printed in Austria